MJN- Positions Algoritme

For Kvadratrødder af De Perfekte Kvadrater

Matematiseringen af Videnskab

Alle er bekendt med begreberne Algebra og Algoritme, men meget få ved, at disse blev grundlagt af Muhammad Ibn Musa **Al-Khwarizmi** (ca.780-850 e.Kr., Visdommens Hus, **Bagdad**). Han var matematiker, astronom, geograf og kartograf.
Videnskabet er bro mellem generationer, især inden for matematik verden. Den er i konstant udvikling. Fra tidernes morgen har flere matematiker sat deres præg på fortidens og nutidens matematik. **Al-khwarizmi** var blandt dem, hvis viden og metoder stadig anvendes fra øst til vest.

Al-Khwarizmi har udviklet begrebet algoritmen (et ord der stammer fra **Al-Khwarizmi** latiniseret navn algoritmos) i matematik "step- by-step procedure for mat.", som betyder metoden, teknikken eller opskriften til løsning af et problem. Derfor blev han kaldt "forfader til datalogi".

Al-Khwarizmi var den første til at indføre **algebra** i en grundlæggende form, som kan anvendes i dagligdagen i den vestlige verden. Han var den første til at skrive om algebra og derfor blev også kaldt "faderen til algebra".

Hans bog **"The Book of Restoring and Balancing"** er en latinsk oversættelse af **" Al-Jabr w'al-Muqabala"**.
Ordet **"Al-jabr"** er et arabisk ord og betyder restaurering/genopretning eller færdiggørelse. Det kaldes processen, hvor negative tal fjernes fra ligningen ved at tilføje den samme mængde til hver side.
"Al-muqabala" er reduktion el. balancering af de to sider af en ligning. Det kaldes processen, hvor mængde af samme type bringes til den samme side af ligningen.
F.eks. $bx + q = ax^2 + bx - 3q$
Ligningen bliver omdannet til $q + 3q = ax^2 + bx - bx$
Ligningen reduceres til $4q = ax^2$

Bogen er en af de vigtigste nogensinde skrevet bøger om matematik, fordi den definerede algebra, som en separat gren af matematikken. I denne bog viste **Al-Khwarizmi**, hvordan man anvender matematiske metoder for at forenkle dagligdags emner såsom arv, handel, retssager, måling af landområder, gravning af kanaler, osv.
Den latinske oversættelse af hans bog blev brugt, som den vigtigste matematiske lærebog i europæiske universiteter indtil det sekstende århundrede.
A.K. var den første, der udskiftede tegnet (+ eller -), når de blev flyttet fra den ene side af ligningen til den anden side.

I bogen beskrives også grundlæggende *algebraiske metoder til løsning af forskellige ligninger*. Han viser også, hvordan vi kan *løse en andengradsligning geometrisk*[1].
Det er også interessant, at han ved, at andengradsligning har to løsninger: $x = (- b \pm \sqrt{(b^2- 4ac)}) / 2a$.
Dette er det samme som det, vi gør i algebra i dag.

A.K. udviklede detaljerede trigonometriske tabeller med sinus, cosinus og tangent funktioner.
Han forklarede *multiplikationen* af *plus og minus tegn*: (− x + = −), (−x − = +), (+ x + = +) og multiplikationen af parenteser. Han var den første til at udvikle pædagogiske metoder til at undervise nybegyndere beregninger af de fire regningsarter. Han opfandt f.eks. gitter multiplikation[2] til at multiplicere store tal. Hans gitter metode blev senere indført i Europa af **Fibonacci**.

A.K. vedtog brugen af *nul*, et tal med enorm betydning i matematik og naturvidenskab, da det giver begrebet en positionel værdi. Anvendelsen af nul gav os decimal systemet.

A.K. opfandt *det arabiske talsystem,* som vi i dag kender og anvender i den vestlige verden. Han *designede arabertal*[(3)] med vinkler, hvor han opkaldt tallene efter antal vinkler. Dette muliggør addition, subtraktion, multiplikation og division, som kan udføres væsentlig hurtigere og lettere end brug af romertal, da de nye tal var mindre pladskrævende, eftersom ét symbol repræsenterede et ciffer. F.eks. Tallet **3888** er på 15 romerske bogstaver: **MMMDCCCLXXXVIII**.

A.K. beskæftigede sig med at opdage beviser og formler for *arealer af forskellige plane figurer* (cirkler og trekanter) og at finde *rumfanget af rumlige figurer* (kugle, kegle, pyramide).

A.K. bestemte værdien af *π, som er 22/7*. I gennem tiden har **A.K.** bidraget med stor matematisk forskning og samfundsrelateret matematik.

Det var desværre ikke muligt at låne det originale udgave **" Al-Jabr w'al-Muqabala"** fra **Bodleian** biblioteket (**Oxford**), derfor var jeg nødt til at orientere mig og læse mange sider på forskellige sprog på google og se flere dokumentarfilm på YouTube, for at indsamle lidt viden om en af verdens største matematikere. Snakken om **Al-Khwarizmi** kan ikke sammenfattes i få ord. I artiklen beskrives kun nogle af hans bidrag i matematik.

Den belgiske-amerikanske matematiker, kemiker og historiker **George Alfred Leon Sarton** (1884-1956) lærte arabisk, forskede og skrev om islamisk videnskabsmænds historie. I bogen *"Introduction to the History of Science"*: beskriver han **Al-Khwarizmi** som følgende:
... the greatest mathematician of the time, and if one takes all the circumstances into account, one of the greatest of all time....

De sidste 30 år har vi oplevet en teknologisk revolution i stuerne. Det går tilbage til opbygningen af computere, som har nu medført udvikling af internet, fladskærme, smartphones, spilkonsoller, pc'er og tablets.
Afslutningsvis gjorde algebra og algoritmer det muligt at bygge computere samt oprettelsen af kryptering. Det var et kæmpe spring for menneskeheden. Foruden algebra ville den moderne matematik ikke have været muligt og den moderne teknologi ville ikke eksistere. Takket være bidrag fra matematikere som **Al-Khwarizmi**.
Desuden beskrev han, hvordan man kan finde *kvadratroden af et tal*. Jeg beskriver også det samme, men ud fra min egen algoritme, kaldet **MJN-Positions Algoritme** *for kvadratrødder af de perfekte kvadrater*.

Kvadrattal fås ved at multiplicere tallet med sig selv (n^2). F.eks. $5^2 = 5*5 = 25$

Al-Khwarizmi's formel for kvadratrødder:

$$\sqrt{x} = A + \frac{r}{2A+1}$$, hvor

A er kvadratrod af det tætteste perfekt kvadrat til x. r er rest af x minus det tætteste perfekt kvadrattal.

Eks1.: $\sqrt{10}$ =**?** 10 er ikke perfekt kvadrat A =? r =?
Det tætteste perfekt kvadrat til 10 er 9. kvadratrod af 9 er 3(=A). r = x - 9 = 10 - 9 = 1(=r, rest).

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{2\times 3+1} = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3{,}1429$$

Eks2.: $\sqrt{49}$ =**?** 49 er et perfekt kvadrat A =? r =?
Det tætteste perfekt kvadrat til 49 er 36. kvadratrod af 36 er 6(=A). r = x - 4 = 49 - 36 = 13(=r, rest).

$$\sqrt{49} = 6 + \frac{13}{2\times 6+1} = 6 + \frac{13}{13} = \frac{91}{13} = 7$$

Egenskaber af de perfekte kvadrater
Et perfekt kvadrat er multiplikation af heltal med sig selv.
F.eks. 36 er en perfekt kvadrat, fordi √36 er 6x6 (6 er et heltal).

- ∗ Et tal, der ender med 2, 3, 7, eller 8 er aldrig et perfekt kvadrat.
- ∗ Et tal, der ender med ulige antal nuller er aldrig et perfekt kvadrat.
- ∗ Kvadratet af lige tal er altid lige. F.eks. $4^2 = 16$
- ∗ Kvadratet af ulige tal er altid ulige. F.eks. $7^2 = 49$
- ∗ Kvadratet på et hel tal er lig med summen af de første ulige tal.

F.eks.
9∗9 = 81, dvs. 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 81(Der adderes de første 9 ulige tal).
10∗10 = 100, dvs. 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100(Der adderes de første 10 ulige tal).

MJN- Positions Algoritme for kvadratrødder af de perfekte kvadrater

Hvordan beregner man en kvadratrod af et perfekt kvadrattal uden en lommeregner?
Hvis du ønsker at forstå, hvordan man får kvadratroden uden at bruge en lommeregner, studere de følgende eksempler[(4)] omhyggeligt! Du må have lidt tålmodighed, inden du mestrer kvadratrødder af de perfekte kvadrater.

5 og 10- tabellen er interessante i min algoritme:
5-tabellen (5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, etc.)
Tabeller er kendt af elever og noget alle elever kan lide.

5 tabellen har følgende regel:
Reglen er at gange tallene, der ender med 5 med sig selv (15x15, 25x25, 35x35, etc.):

1. Svaret ender med 25
2. Cifret foran 5 i potenstallet ganges med det næste tal i talrækken, dvs. 1 ganges med 2, 2 ganges med 3, 3 ganges med 4, osv.

Eks.

15^2
x2 **225**

25^2
x3 **625**

35^2
x4 **1225**

45^2
x5 **2025**

3. Gælder det omvendte, hvis et perfekt kvadrattal ender med 25 og kvadratroden skal beregnes vil 5-tallet altid besidde enernes plads F.eks. 4225, 7225, 9025?
Derefter bestemmes produktet af to på hinanden følgende tal.

4225: **42** = **6** x 7, så kvadratroden er **65**.
7225: **72** = **8** x 9, så kvadratroden er **85**.
9025: **90** = **9** x 10, så kvadratroden er **95**.

"Hvorfor skal jeg lære, hvordan man beregner kvadratroden af et tal? spørger nogle elever. Bruges kvadratrødder i det virkelige liv uden for matematik timen?"

Kvadratrødders anvendelse i den virkelige verden:

- Forestil dig dine forældre og dig tænker på at købe et hus, og de kan se i annoncen, at huset er 1225 m^2 (kvadratisk hus). Er det et lille hus? Eller et stort hus? Hvad betyder det? Kvadratroden af huset fortæller dig, hvor stor (hvor mange meter?) hver side af huset er. Kvadratroden af 1225 er 35 m, så huset er 35 m bred og 35 m lang (se forklaringen ovenfor).

- Mange quiz-programmer stiller spørgsmål om matematiske færdigheder, som primtal, kvadratrødder, etc. I programmet "Hvem vil være millionær" har deltageren vundet 250 000 kr., en anden har tabt 75 000 kr. grundet et spørgsmål om kvadratrod.

- Kvadratrødder bruges hele tiden af forskere, ingeniører og folk, der arbejder på fabrikker $\rightsquigarrow$ normalfordeling (statistisk fordeling).

- En flyvemaskines hastighed $\rightsquigarrow$ $V = \sqrt{\dfrac{L}{C_L(\max).\frac{1}{2}.\rho.A}}$

Andre eksempler for brugen af kvadratrod:

- Andengradsligninger**(x^2)** $\rightsquigarrow$ funktioner og tegning af grafer
- Pythagoræiske læresætning $\rightsquigarrow$ trigonometri(cosinusrelationer)
- Geometri $\rightsquigarrow$ areal af trekant (Herons formel), diagonallængde (rektangel, kvadrat), buelængde af parabel og parablens (rødder/skæring med x-aksen), omkreds af ellipse og ellipsens excentricitet, krumme overflade af ret kegle og keglestub, etc.
- Fraktioneret eksponenter **($\sqrt{x} = x^{1/2}$)** for **$x \geqq 0$** $\rightsquigarrow$ funktioner og tegning af grafer

Hvordan finder du kvadratrod af et givet tal vha. MJN – Positions Algoritme?
Du kan vurdere en *kvadratrod* i dit hoved ved at regne ud, *hvilke to perfekte kvadrater tallet falder imellem*. (Den første tilhører multipla af 5 ganges med sig selv og den anden tilhører multipla af 10 ganges med sig selv).
For eksempel: Hvad er kvadratroden af 729?
Da 729 er større end 625(25x25), men mindre end 900(30x30), kan du med det samme sige, at kvadratroden af 729 skal være et tal mellem n = 25 og n = 30. Og du kan også sige, at det rigtige svar skal være lidt tættere på 25 end 30, da 729 er tættere på 625 end 900.

Ved hjælp af 1. formel: $+ \rightsquigarrow (2n + 1) \uparrow^{+2}$
$2n + 1 = 2 \cdot 25 + 1 = 51$, hvor $(n = 25)$
$\sqrt{729}$ = <u>625</u> + 51 $\rightsquigarrow$ 676 + 53 $\rightsquigarrow$ 729, det næste ulige tal er **55**. Serie nr. til **55** skal beregnes.
Serie nr. til **55** = (55 − 1): 2 = 27. Så $\sqrt{729}$ = **27**

eller

Ved hjælp af 2. formel: $- \rightsquigarrow (2n - 1) \downarrow_{-2}$
$2n - 1 = 2 \cdot 30 - 1 = 59$, hvor $(n = 30)$
$\sqrt{729}$ = <u>900</u> - 59 $\rightsquigarrow$ 841 - 57 $\rightsquigarrow$ 784 − 55 $\rightsquigarrow$ 729. Serie nr. til det samme sidste ulige tal skal beregnes.
Serie nr. til **55** = (55 − 1): 2 = 27. Så $\sqrt{729}$ = **27**

Læs mere om serie nr.- metode i:
***MJN's serie nr.-metode* for retvinklede trekanter**[5]
(MJN's Serial no.-Method of right-angled triangles)

Professor Bent Ørsted (ph.d. i matematik ved Massachusetts Institut of Technology, USA)
B.Ø. er tidligere forsker og underviser i matematik ved en lang række universiteter i USA, Argentina, Tyskland og Frankrig
Medlem af Nationalkomiteen for Matematik i Danmark
Institut for Matematik, Science & Technology, Aarhus Universitet

Kære Mohamed J. Nasser,

Tak for dine interessante noter om kvadrater og metoden til at finde kvadratrødder; jeg kan se, at den bygger på formlen for differensen af to på hinanden følgende kvadrater, kombineret med din definition af "MJN- Serial number". Jeg er sikker på, at du kan inspirere elever hermed (selvfølgelig ikke alle, men alligevel). Det ser ud som om der kunne være noget lignende for kubiske tal n^3 = n.n.n hvor differensen af to på hinanden følgende tal bliver givet ved 6 T(n) + 1, hvor T(n) er trekantstallet n(n+1)/2.

Venlig hilsen,
Bent Ørsted.