Professionshøjskolen UCC

Læreruddannelsen Zahle

GODKENDELSE AF EMNE TIL BACHELOROPGAVEN 2013

Bruges som forside til bacheloropgaven

Navn: Sidsel Katrine Petersen

Studienummer: z090141

Opgavens linjefag: Matematik

Opgavens emne: Algebraiske vanskeligheder

Antal anslag i opgaven: 77.314

	Initialer	Underskrift	Dato
Linjefagsvejleder:	HKRI	Heidi Kristiansen	1/3-2013
PPD-fagvejleder:	BEBO	[illegible]	1.3.2013

Må opgaven udlånes af Zahles bibliotek? Ja ☐ Nej ☒

Underskrift: Sidsel Katrine [illegible] (Studerende) — **Dato:** 12/4-2013

Side 1 af 1

Indholdsfortegnelse

1. Indledning 3
2. Problemformulering 3
3. Metode 4
4. Algebra 5
4.1. Den algebraiske udvikling 5
4.2. Den algebraiske cyklus 6
5. Repræsentationer i matematik 7
5.1. Repræsentationskompetencen 7
5.2. Duvals registre 8
5.3. Bogstaver som repræsentationer 9
5.4. Bogstavsvanskeligheder set med Duvals og Bergstens ”øjne” 10
6. Undervisningsforløb i ligninger til 5. kl. 12
6.1. Overvejelser inden forløbet 12
6.2. Forløbets rammer og opbygning 13
6.3. Modul 1: ”Bogstaver er tal vi ikke kender” 13
6.4. De efterfølgende refleksioner 15
7. Paul Cobb og et socialkonstruktivistisk læringssyn 15
8. Undervisningsforløbet i et analytisk perspektiv 18
8.1 Forløbet set i lyset af Cobb & Yackels fortolkningsramme 18
8.2. Bergsten og Duval 22
9. At arbejde med elevers repræsentationskompetence 24
10. ”Frugtsalat-algebra” - en klassisk vej til misopfattelser? 25
10.1. Bogstaver som mentale billeder - kvaliteter og faldgruber 27
10.2. Gem frugten til frikvarteret 29
11. Konklusion 30
Litteraturliste 31

Bilag 33
Bilag 1 - Undervisningsplan for ligningsforløb til 5.klasse 33
Bilag 2 - Casebeskrivelser fra modul 1. 34
Bilag 3 - Opgaveark 1 fra modul 1. 36
Bilag 4 - Opgaveark 2 fra modul 1. 37
Bilag 5 - Casebeskrivelse fra modul 2. 38
Bilag 6 - Elevbesvarelser af spørgeskema omkring deres bogstavforståelse. 39
Bilag 7 - Niendeklasses elevers besvarelse af et spørgsmål omkring deres bogstavforståelse 41
Bilag 8 - Opgave og eksempler fra Formats elevbog 42

Hvorfor beskæftige sig med algebraiske vanskeligheder?

”Algebra är för matematik vad grammatik är för språk. Utan en god kunskap i grammatik kan man aldrig bli rigtig duktig på ett främmande språk, varken mundtligt eller skriftligt.”

(Palm 2008, s. 41)

1. Indledning

Algebra er et af kerneområderne i matematik jf. Fælles Mål (Undervisningsministeriet 2009, s. 4). Desværre er det også den del af matematikken, som ofte volder eleverne flest problemer. Jeg har forhørt mig hos adskillige matematiklærere, og alle havde oplevet vanskeligheder ved algebra blandt deres elever. Deres største udfordring havde ofte været at gøre eleverne fortrolige med den såkaldte ”bogstavregning”, som uden tvivl nævnes, som den største årsag til frustration og misopfattelse blandt elever.

I løbet af min læreruddannelse har jeg gennem min praktik selv oplevet og erfaret denne problematik på nært hold. Det kraftigste udtryk for problematikken fik jeg sidste år, da jeg i et forløb omkring potensregneregler i en niende klasse oplevede stor frustration, når matematiske udtryk indeholdt bogstaver enten som ubekendte eller variable. En elev udtrykte: *”Det giver bare ikke så meget mening, at man bruger bogstaver i matematik, man burde holde sig til tal”*. I den pågældende situation var jeg mest fokuseret på, hvordan jeg kunne støtte disse elever til en bedre algebraisk forståelse, men efterfølgende begyndte jeg at overveje, hvad man kunne gøre i et forsøg på at forhindre, at sådanne vanskeligheder overhovedet blev aktuelle. For mig, som matematiker, er brugen af bogstaver kun en hjælp til at generalisere og skabe overblik. Jeg blev derfor nysgerrig efter at finde en tilgang til ”bogstavregning”, som kunne støtte eleverne i en bedre forståelse for betydningen og brugen af bogstaver i matematik allerede første gang de møder dem og herved styrke deres forståelse for brug af repræsentationer i matematik. Samtidig blev jeg også nygerrig efter at blive klogere på, hvad vanskelighederne ved såkaldt ”bogstavsregning” kunne skyldes, og om grunden hertil skulle findes i undervisningen. På grund af kendskab til og tidligere erfaringer med ”frugtsalat-algebra”, som bl.a. findes i den klassiske reduktionslære, hvor bogstaver indgår som objekter frem for tal, begyndte jeg at overveje, om dette måske kunne være basis for senere misopfattelser.

Hvor i matematikundervisningen kan elevers vanskeligheder ved algebra tænkes gemt?
Hvilke didaktiske tiltag kan afhjælpe elevers ”bogstav”-frustration og irritation?
Hvordan kan læreren i det hele taget støtte elevers repræsentationskompetence?

Disse overvejelser førte mig frem til opgavens problemformulering.

2. Problemformulering

Hvilke muligheder har man som matematiklærer for at støtte elevers udvikling af repræsentationskompetencen indenfor algebra og derigennem arbejde for at mindske algebraiske vanskeligheder?

3. Metode

Algebraiske vanskeligheder er et ganske omfattende begreb, og i denne opgave vil det derfor være vanskeligheder ved bogstavers betydning i matematik, som er i fokus. Jeg vil i opgaven argumentere for at bogstavvanskeligheder har indvirkning på elevers repræsentationskompetence og ligeledes hvordan en korrekt bogstavforståelse kan styrkes gennem udvikling af denne kompetence. Til dette formål har jeg valgt at bruge Raymond Duvals registerteori, som jeg finder god mening i at anvende til en beskrivelse af de matematiske processer som tilhører repræsentationskompetencen. Disse processer vil jeg sammenholde med Christer Bergstens algebraiske cyklus og herunder cyklussens tre faser, som er grundlaget for det algebraiske arbejde. Ved at bruge Dietmar Küchemanns beskrivelse af en korrekt og en misforstået bogstavsopfattelse, vil jeg ud fra Bergstens og Duvals teorier undersøge, hvordan elevernes bogstavforståelse har indvirkning på deres algebraiske arbejde og herunder udvikling af repræsentationskompetencen. Samtidig vil jeg undersøge hvilke handlemuligheder deres teorier giver underviseren for at støtte eleverne i en korrekt bogstavforståelse.

Efter dette teoretiske arbejde vil jeg redegøre for mit undervisningsforløb, som jeg konstruerede i forbindelse med min fjerdeårspraktik. Omdrejningspunktet for dette var ligninger, men havde et særlig fokus på elevernes bogstavforståelse. Gennem min undervisningsplan og egne konstruerede elevark samt casebeskrivelser med nedskrevne dialogsekvenser, vil jeg forsøge at belyse de aspekter ved forløbet, som bidrog til en korrekt bogstavforståelse hos eleverne. Dette vil jeg efterfølgende analysere nærmere ved at inddrage det socialkonstruktivistiske læringssyn og Paul Cobb. Paul Cobb finder jeg særligt interessant grundet hans syn på teori og praksis som to refleksive størrelser. Denne tilgang til læring finder jeg i god overensstemmelse med mit eget uddannelsesforløb, som består af både teoretisk undervisning og praksis. Jeg vil derfor redegøre for Cobb & Yackels fortolkningsramme for læring i et matematiske klasserum og herefter bruge denne til en videre analyse af undervisningsforløbet. Her vil jeg også inddrage elevbesvarelser fra udleverede spørgeskemaer før og efter forløbet samt Bergstens og Duvals principper og herigennem diskutere hvorledes forløbet støttede op om elevernes repræsentationskompetence. Slutteligt vil jeg sammenfatte de væsentligste aspekter man, som underviser, bør være opmærksom på i forhold til udvikling af elevers repræsentationskompetence.

Jeg vil ligeledes stille mig kritisk overfor, hvorvidt man som matematiklærer øger risikoen for misopfattelser ved at bruge ”frugtsalat-algebra” som en tilgang til reduktionslæren. Dette vil jeg gøre ved at sammenholde undervisningserfaringer i Formats undervisningsmateriale i reduktion, som netop anvender denne tilgang, fra min førsteårspraktik, med oplevelser og erfaringer fra min

tredjeårspraktik, hvor niendeklasses elever stadig fastholdt bogstaver som værende symboler for objekter.

Jeg vil starte med en kort redegørelse for algebra og den algebraiske udvikling samt beskrive principperne i Bergstens algebraiske cyklus.

4. Algebra

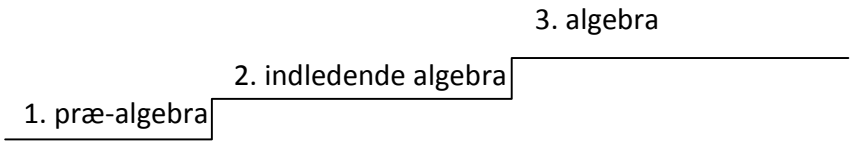
Algebra bliver ofte sat synonymt med "bogstavsregning". Dette hænger højst sandsynligt sammen med, at mange elever først bliver opmærksomme på, at de arbejder med algebra, når tallene er byttet ud med bogstaver. Men slår man ordet op i en matematisk opslagsbog, får man følgende definition på algebra: *"består af studier af operationer med og relationer mellem tal ved brug af variable eller bogstavsymboler*." (Karush 1984, s. 19). Algebra er således et meget bredt og omfangsrigt begreb, som bruges i mange områder i matematikken. For at opnå en mere nuanceret beskrivelse vælger jeg at henvise til Barbara Van Ameroms definition på algebra (2003, s. 64), hvor der skelnes imellem fire perspektiver:

1. algebra som problemløsningsværktøj
2. algebra som generaliseret aritmetik
3. algebra som studie af relationer
4. algebra som studie af strukturer

Skønt jeg anser alle disse for værende vigtige, vil det i denne opgave være algebra som problemløsningsværktøj, der fokuseres på. Dette skyldes bl.a. at dette perspektiv fremhæves i matematikfagets formål, hvoraf det fremgår, at elever skal kunne benytte matematik til problemløsning og ikke mindst grundet dette perspektivs anvendelsesorienterede aspekt, der var udgangspunkt for det senere behandlede undervisningsforløb.

4.1. Den algebraiske udvikling

Progressionen i algebraundervisningen i folkeskolen kan opdeles i tre trin
jf. Bergsten (1997A, s. 17):

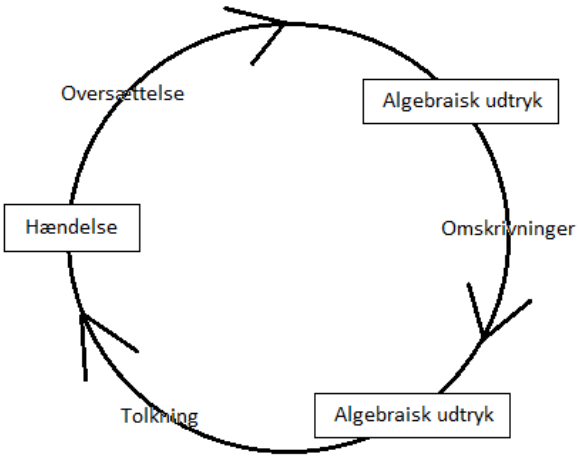


I præ-algebra forberedes eleverne til algebraisk tænkning gennem forskellige aktiviteter og opgaver, dog uden at anvende variable. På næste trin i den indledende algebra introduceres bogstavsymboler,

som repræsentationer for tal. Denne overgang fra aritmetik til det algebraiske symbolsprog er ofte en tidskrævende proces og benævnes af Bergsten som "den kritiske fase", idet fundamentet for en korrekt algebraisk forståelse hos eleverne skabes her (1997A, s. 18). Dette synspunkt vil blive yderligere behandlet i afsnit 8.2. Endelig befinder eleverne sig på det sidste trin, algebra, når de behersker og er blevet fortrolige med den algebraiske cyklus.

4.2. Den algebraiske cyklus

Det algebraiske arbejde kan opdeles i tre faser; en oversættelsesfase; en omskrivningsfase og en tolkningsfase. Disse indgår i den algebraiske cyklus, som vist herunder:



Den algebraiske cyklus (Bergsten m.fl. 1997A, s. 15)

Denne beskriver, hvordan algebra kan bruges som et problemløsningsværktøj. Der tages udgangspunkt i en hændelse eller et problem, som i oversættelsesfasen oversættes til et algebraisk udtryk. Dette bearbejdes i omskrivningsfasen til et nyt matematisk udtryk. I den sidste fase tolkes det fremkomne matematiske symboludtryk, således at det kan knyttes til hændelsen eller problemet, som var udgangspunktet for hele problemstillingen. Alle tre faser er betydningsfulde og afhængige af hinanden, og forståelse for dem er nødvendig for at kunne arbejde algebraisk. Det er derfor vigtigt, at eleverne gennem matematikundervisningen gøres fortrolige med og kan håndtere hver enkelt fase. Derved kan algebra blive til et sprog, som eleverne kan læse og forstå samt anvende til at beskrive generaliseringer og sammenhænge, som jo netop er formålet med algebra (Undervisningsministeriet 2009, s. 52).

I forhold til elevers bogstavforståelse, mener Bergsten, at omskrivningsfasen ofte prioriteres højere end oversættelses- og tolkningsfasen i traditionel matematikundervisning, og at dette kan medvirke

til en meningsløs symbolbehandling, der kan give anledning til vanskeligheder for eleverne (Bergsten m.fl. 1997A, s. 16). Dette synspunkt behandles nærmere i afsnit 8.2.

5. Repræsentationer i matematik

En repræsentation defineres af Duval som at være ”noget, der står i stedet for noget andet” (2006, s. 103). Når man eksempelvis arbejder med mængder, bruger man tegn til at angive størrelsen af dem, f.eks. kan tegnet ”4” repræsentere antallet af kanter i en firkant. En graf kan repræsentere en sammenhæng, ligesom lighedstegnet, ”=”, repræsenterer en ækvivalensrelation og så fremdeles. Matematik er et abstrakt fænomen, hvor det sjældent er muligt at gå ud i verden og finde det - se det direkte. Matematik kommer i spil ved brug af repræsentationer, hvilket Duval også udtrykker: ”*Mathematical objects…The only way to have access to them and deal them is using signs and semiotic representations*”. (Duval, 2006, s. 107). Repræsentationer er ikke blot en uvurderlig del af matematik, men også en nødvendighed for at vi kan arbejde med og bruge matematikken. Vigtigheden i at opnå kunnen og forståelse herfor skinner ligeledes igennem i Fælles Mål for matematik. Her fremstår de otte forskellige matematiske kompetencer som et selvstændigt kundskabs- og færdighedsområde, og en af disse er netop repræsentationskompetencen.

5.1. Repræsentationskompetencen

De matematiske kompetencer er ligeligt fordelt i to grupper; ”At kunne spørge og svare i, med og om matematik” samt ”At omgås sprog og redskaber i matematik”. I sidstnævnte findes repræsentationskompetencen. Denne kan groft opdeles i tre dele:

1. at kunne forstå og betjene sig af forskellige repræsentationer af matematiske objekter, fænomener, problemer og situationer.
2. at kunne forstå de indbyrdes forbindelser mellem forskellige repræsentationsformer for det samme sagsforhold, samt kendskab til styrker og svagheder.
3. at kunne vælge blandt og oversætte imellem forskellige repræsentationsformer.
   (Niss & Jensen 2002, s. 56)

Ligeledes har symbolske repræsentationer en særlig stor rolle indenfor repræsentationskompetencen. Denne kompetence er i øvrigt nært forbundet med de resterende tre i samme gruppe; symbolbehandlings-, kommunikations- og hjælpemiddelskompetencen. Disse vil dog ikke blive behandlet yderligere her.

5.2. Duvals registre

Raymond Duval er en fransk matematiker, som er optaget af de kognitive processer, der er grundliggende for matematisk aktivitet. Han mener, at matematisk aktivitet kræver brug af forskellige semiotiske repræsentationssystemer, og at en større forståelse for de tilknyttede processer skal findes her. Et semiotisk system er et tegnbaseret system, et eksempel herpå kunne være vores talsystem, og dette er nødvendigt for at foretage matematiske processer. Ganske enkelt fordi matematiske objekter ikke kan behandles eller observeres direkte, og det er derfor det semiotiske system, som gør det muligt at handle og operere med de forskellige matematiske begreber. Formålene med tegnene er, at de kan manipuleres. Duval pointerer: ”*the leading role of signs is not to stand for mathematical objects, but to provide the capacity of substitution some signs for others*”. (Duval, 2006, s. 106). En matematisk proces vil altid involvere en substituering af nogle semiotiske repræsentationer for nogle andre. Dog er det ikke selve repræsentationerne, men den proces de gennemgår, også kaldet for deres transformation, som er af største betydning for den matematiske aktivitet, som han selv udtrykker i følgende: ”*…signs and semiotic representation transformation are at the heart of mathematical activity*”. (Duval, 2006, s. 107).

Duval skelner mellem fire semiotiske systemer, som hver kaldes for et register (2006, s. 109). Først har han skelnet mellem et sprogligt og et visuelt register. Det sproglige register omfatter matematik formuleret i både hverdagssprog og symbolsprog. Det visuelle er de sammenhænge, hvor matematik fremstilles i form af både formelle og uformelle tegninger og illustrationer. Registrene er efterfølgende opdelt i et multifunktionelt og et monofunktionelt register. I et multifunktionel register er de semiotiske systemer ikke bestemt af algoritmer og er derved ikke regelbaseret. I et monofunktionelle register er de semiotiske systemer hovedsagligt bestemt ved algoritmer og vil derfor være regelbaseret. Dette giver følgende fire registre, som kan aktiveres gennem matematiske processer:

	Sprogligt	**Visuelt**
MULTI-functional - ikke regelbaseret	R1	R3
MONO-functional - regelbaseret	R2	R4

Eksempler på indholdet i de forskellige registre følger herunder:

R1	Mundtlig/skriftlige forklaringer i naturligt sprog/hverdagssprog. Visuelt skrevne definitioner, sætninger og beviser.
R2	Skrevne symbolske udtryk. Beregninger og beviser.
R3	Ikoner, som tegninger, skitser, mønstre. Ikke-ikoner, som geometriske figurer, der kan konstrueres med redskaber.
R4	Diagrammer, grafer

Frit oversat efter Duvals egen grafiske præsentation af registrene (ibid., s. 110)

Et register tillader en transformation, dvs. en omdannelsesproces. Her skelnes mellem to typer:

- Treatments (omformninger): transformationer, som sker inden for samme register.
- Conversions (oversættelser): transformationer, som kræver registerskift.

En treatment i R1, dvs. i det sproglige multifunktionelle register, kunne f.eks. være at lave en regnehistorie på baggrund af en problemstilling. Herefter kunne opgaven ligge i at foretage en conversion ved at omskrive regnehistorien til en ligning og derved bevæge sig ind i det sproglige monofunktionelle register, R2. Løsningen på denne ligning ville da kunne findes ved en treatment i R2, som via en conversion tilbage til R1 kan knyttes til problemstillingen. Et andet eksempel på en conversion kunne være, at tegne en graf på baggrund af en ligning. Dette ville da være en conversion fra det sproglige monofunktionelle til det visuelle monofunktionelle register, dvs. en oversættelse fra R2 til R4.

I forhold til repræsentationskompetencen jf. afsnit 5.1 vil jeg mene at kunne drage følgende sammenhæng mellem denne og Duvals transformationer. Forståelsen for og beherskelsen af treatments optræder under kompetencens første punkt, idet dette punkt netop omhandler forståelse for, samt beherskelse af et af de fire registre. At kunne foretage og forstå conversions kræver både, at man kan skelne mellem og forstå de indbyrdes forbindelser mellem forskellige repræsentationer samt kan oversætte imellem dem. Ydermere vil jeg mene, at conversions også er omfattet af at kunne bedømme styrker og svagheder ved en given repræsentation. Det er baggrunden for at kunne foretage et kvalificeret valg imellem dem, når problemstillingen er åben, og eleverne selv skal vælge hvilken conversion, som giver det bedste resultat. Som resultat heraf, vil jeg derfor anse Duvals nævnte transformationer som kernen i repræsentationskompetencen. Arbejdet med elevers repræsentationskompetence bør derfor have fokus på at styrke elevernes forståelse og fortrolighed med treatments og conversions.

5.3. Bogstaver som repræsentationer

I den indledende algebra indføres bogstaver som repræsentationer for tal. Dette kan være som erstatning for en ubekendt konstant, en variable eller måske som en parameter, alt afhængig af den sammenhæng de indgår i. Fælles for dem vil dog være, at de nu ikke blot er et bogstav fra alfabetet eller et symbol for et objekt eller f.eks. en forkortelse, men at de repræsenterer et tal. Dette kræver en abstraktion af eleverne, der er nødvendig for at danne en korrekt bogstavforståelse.

Küchemann beskriver forskellige bogstavforståelser blandt elever (1981, s. 104), som groft kan inddeles i to kategorier. I den første afholder eleverne sig fra at se bogstavet som et specifikt ukendt tal. Den anden er den første kategoris modsætning, idet elever ved denne bogstavforståelse er i stand til at behandle bogstaverne som en ubekendt konstant eller en variabel. Målet i undervisningen er derfor, at eleverne tilhører Küchemanns kategori 2. Kategori 1 kan bruges til at undersøge, hvori elevernes vanskeligheder ved bogstavsymboler består. Disse kan ifølge ham selv komme til udtryk gennem et eller flere af følgende tre udsagn:

1. bogstavet gives en tilfældig værdi
2. bogstavet ignoreres
3. bogstavet ses som symbol for et objekt eller som en forkortelse for et ord

I alle tre tilfælde vil der være tale om en misopfattelse af bogstavets brug og betydning, hvor udfordringen ligger i at skabe forståelse for bogstavet som repræsentant for en talværdi og samtidig belyse hensigten og herigennem de muligheder det skaber.

Mollie MacGregor og Kaye Stacey undersøgte i 1997 elevers forståelse af algebraisk notation og herunder elevers bogstavforståelse. Her fandt de frem til, at elever ofte baserer deres bogstavforståelse på intuition og gæt, i analog med forståelse for andre symbolsystemer eller på et falsk grundlag udsprunget af misledende undervisningsmateriale (MacGregor & Stacey 1997, s. 15). Dette kunne tyde på, at eleverne mangler forståelse for og støtte i deres tilgang til dannelse af deres bogstavforståelse, som sker i den indledende algebra. Samtidig viste undersøgelsen, at opfattelsen af bogstaver, som forkortelse af ord eller bogstaver som objekter, var særlig udbredte. Samme synspunkt deles af Bergsten (1997B, s. 51). Denne tredje bogstavvanskelighed virker herved særlig stor og omfangsrig, hvilket måske kan skyldes elevernes manglende evne til at abstrahere fra bogstavets oprindelige betydning fra alfabetet. Matematikunderviseren bør derfor være særlig opmærksom på denne problematik og gennem sin undervisning søge at undgå, at elever danner denne misopfattelse, som vil fastholde dem i Küchemanns kategori 1 og derved fordre vanskeligheder ved algebra.

5.4. Bogstavsvanskeligheder set med Duvals og Bergstens "øjne"

Jeg vil her sammenholde Duvals registerteori og Bergstens algebraiske cyklus og herigennem argumentere for sammenhængen mellem Duvals transformationer og den algebraiske proces.

Tages der eksempelvis udgangspunkt i en problemstilling, som er præsenteret for eleverne i form af en regnehistorie, vil eleverne starte i det sproglige multifunktionelle register, R1. Herefter skal de foretage en conversion til R2 i oversættelsesfasen og på den måde oversætte problemstillingen til et

matematisk udtryk. Denne opererer de så på i omskrivningsfasen, der er en treatment i R2, hvorefter de igen foretager en conversion tilbage til R1, hvor de i tolkningsfasen kan tolke svaret i forhold til regnehistorien. Som følge heraf vil en algebraisk proces som udgangspunkt altid indeholde mindst en treatment og to conversions. Håndtering af og forståelse for flere forskellige matematiske processer, der ifølge Duval består af treatments og conversions, er derfor nødvendig for at kunne arbejde algebraisk og kunne bevæge sig rundt i den algebraiske cyklus.

Duval anser conversions for at være mere komplekse end treatments. Han begrunder dette med, at registerskift kræver genkendelse af det samme objekt i to forskellige repræsentationer, hvis indhold ofte ikke har noget tilfælles (2006, s. 112). Denne sammenhæng er ofte vanskelig for mange elever, og det er derfor væsentligt, at der i undervisningen bliver taget ekstra hensyn til at styrke elevernes evne til at forstå de indbyrdes forbindelser mellem de forskellige repræsentationer. Mere direkte i forhold til den algebraiske cyklus nævner Duval processen med at oversætte en sproglig problemstilling til et symbolsk udtryk, som værende rigtig svær for eleverne (ibid., s. 121). Hermed plæderer han for at sådan en conversion fra R1 til R2, svarende til oversættelsesfasen i den algebraiske cyklus, kræver særlig stor opmærksomhed. Jeg mener derfor, at Duvals teori kan tolkes som et argument for at det komplekse i den algebraiske cyklus ligger i oversættelses- og tolkningsfasen. Dette synspunkt støttes til dels af Bergsten. Som tidligere nævnt, anklagede han den traditionelle undervisning for at nedprioritere oversættelses- og tolkningsfasen i forhold til omskrivningsfasen. Herved mener han, at symbolbehandlingen kan fremstå som meningsløs for eleverne, da der herved ikke knyttes nogen betydning til bogstavsymbolerne (Bergsten m.fl. 1997A, s. 16). Faren bliver derfor, at eleverne vil opfatte bogstaverne som i Küchemanns kategori 1. Bergsten foreslår dog ikke, at ”rollerne” skal byttes om og derved, at omskrivningsfasen er mindre væsentlig, dog mener han, at arbejdet med dem bør vægtes lige højt i undervisningen. Man kan hente argumenter herfor i Duvals teori, da det i dette perspektiv ikke virker hensigtsmæssigt, at der i undervisningen bruges mindre tid og indsats på at arbejde med de mere krævende elementer af den algebraiske forståelse. En indsats for en bedre bogstavforståelse kunne, ud fra Duval og Bergsten, ligge i at vægte de to øvrige faser i den algebraiske cyklus på samme plan som omskrivningsfasen for på denne måde at gøre bogstaver som talrepræsentationer meningsfyldte for eleverne.

Fundamentet for elevers bogstavforståelse dannes i den indledende algebra, hvor de første gang møder bogstaver, som repræsentanter for tal. På baggrund af de omtalte vanskeligheder, finder jeg det oplagt at undersøge, hvordan man i undervisningen kan støtte elevernes tilgang til en korrekt

bogstavforståelse og på den måde øge muligheden for at de kommer ind under Küchemanns kategori 2. Dette var netop udgangspunktet for mit undervisningsforløb.

6. Undervisningsforløb i ligninger til 5. kl.

I min fjerdeårspraktik fik jeg en femte klasse i matematik. Eleverne var utrolig søde og imødekommende og klassen som helhed var meget harmonisk og arbejdsom. Niveauet i klassen blev omtalt som lidt over middel med en svagere gruppe på en fire-fem elever. Klassen var vant til at deltage i klassedialoger, arbejde individuelt og gruppearbejde med sidemanden. Eleverne sad under hele praktikken sammen i makkerpar, hvis faglige niveau nogenlunde svarede til hinanden.

Grundet min store interesse indenfor algebra og de tanker jeg havde gjort mig siden sidste praktik, havde jeg et stort ønske om at arbejde med elevernes bogstavforståelse. Dette blev godt modtaget af såvel min studiegruppe som praktiklæreren og forløbets omdrejningspunkt blev derfor et ligningsemne med særlig fokus på elevernes bogstavforståelse.

6.1. Overvejelser inden forløbet

Med udgangspunkt i mine tidligere praktikoplevelser ønskede jeg at finde en tilgang til bogstaversrepræsentationer i matematik, som kunne øge elevernes mulighed for at tilhøre Küchemanns kategori 2. Mit mål var, at eleverne skulle opfatte bogstaver som repræsentationer for tal, samtidig med at de kunne se formålet med deres pludselige optræden i matematikken. Jeg anså det derfor for vigtigt, at behovet for og betydningen af dette, skulle gøres tydeligt for eleverne, hvilket skulle skinne igennem i tilgangen og derved også i undervisningsformen. Der skulle sættes fokus på det anvendelsesorienterede aspekt i algebraen og eleverne skulle opleve det nyttige i bogstavsrepræsentationer. Det var derfor vigtigt, at de tre faser i den algebraiske cyklus kom i spil og elevernes kompetence i at kunne beherske de enkelte faser blev udfordret og herigennem styrket. Opgavetyperne, eleverne skulle arbejde med, skulle have en kobling til hverdagssprog og virkelighedssituationer, hvor eleverne skulle opleve behovet og ikke mindst fordelen ved bogstavsrepræsentationer og ligninger i forhold til at finde løsninger på diverse problemstillinger.

Eleverne havde kun meget kortvarigt beskæftiget sig med ligninger i fjerde klasse og i den forbindelse også mødt repræsentationen "*x*" for et ukendt tal. Dog blev det fastslået af praktiklæreren, at det ikke havde været et emne, han var gået i dybden med og at han derfor ikke havde forholdt sig til elevernes bogstavforståelse. Jeg fandt det derfor passende at starte forløbet med et særligt fokus på bogstavers rolle i matematik for på den måde at undersøge, hvorvidt sådan en tilgang kunne være kompetent i forhold til en bogstavforståelse jf. Küchemanns kategori 2.

6.2. Forløbets rammer og opbygning

Forløbet havde følgende tre undervisningsmål:

1. Eleverne skulle blive fortrolige med og kunne forklare bogstavers funktion i matematiske udtryk.
2. Eleverne skulle blive i stand til at opstille simple ligninger på baggrund af et hverdagseksempel.
3. Eleverne skulle blive i stand til at finde løsninger til simple ligninger.

Forløbet bestod af i alt fem moduler. Det første modul var udelukkende afsat til at arbejde med elevernes bogstavforståelse og de efterfølgende fire omhandlede ligninger og deres relation til virkelighedsproblemer samt funktioner. På bilag 1 findes en detaljeret undervisningsplan. Til det første modul udviklede jeg selv det pågældende undervisningsmateriale, som fik overskriften: ”Bogstaver er tal vi ikke kender”. Her fandt jeg det særligt vigtigt, at materialet blev konstrueret med mulighed for differentiering, således at det ”talte” til så mange elever som muligt. Til de resterende fire moduler blev elevernes grundbog, Kolorit 5, benyttet. Dette skyldes bogens tilgang til ligningsemnet, som jeg vurderede bar præg af et anvendelsesorienteret perspektiv på algebra i forhold til at arbejde med regnehistorier, virkelighedsproblemer samt funktioner og ligninger. Herigennem ville eleverne arbejde med de forskellige faser i den algebraiske cyklus og samtidig opleve algebra som et problemløsningsværktøj.

Som evaluering gjorde jeg brug af et spørgeskema, som eleverne fik udleveret i første og femte modul. Dette var således med til at give et indblik i elevernes forforståelse og, mere vigtigt, udbyttet i forhold til de opstillede mål for undervisningen.

Jeg vil i det følgende redegøre for undervisningen fra modul 1, som var grundlæggende for hele forløbet og udgangspunkt for skabelse af en bogstavforståelse tilhørende Küchemanns kategori 2. I de efterfølgende moduler blev der jævnligt trukket paralleller til dette arbejde og elevernes erfaringer herfra, som derved blev inddraget i nye og andre sammenhænge. De omtalte og behandlede dialogsekvenser er udvalgt på baggrund af deres relation til de forskellige belyste aspekter, som samtidig vil være udgangspunkt for den senere analyse i afsnit 8.1.

6.3. Modul 1: ”Bogstaver er tal vi ikke kender”

Eleverne skulle opleve bogstavsrepræsentationerne som nyttige og vigtigst af alt, skulle de se dem som repræsentationer for tal. Til dette formål valgte jeg at bruge tændstikker og indpakkede tændstikæsker.

Eleverne blev præsenteret for en problemstilling, hvor de i fællesskab skulle opskrive et udtryk for det samlede antal tændstikker på et bord, hvor kun nogle af tændstikkerne var synlige, mens resten

lå inde i to indpakkede tændstikæsker. Det eneste eleverne fik at vide var, at der var lige mange tændstikker i hver æske. Denne sekvens samt den tilhørende klassesamtale fremgår af bilag 2. Her fandt eleverne frem til det formålstjenlige i at bruge bogstavet *a*, som en repræsentant for antallet af tændstikker i æsken, altså som et tal, frem for bogstaveligt at skrive, at man udover de løse tændstikker også havde et ukendt antal inde i hver af de to indpakkede æsker.

Herefter fik to elever tildelt et vist antal løse tændstikker samt nogle indpakkede æsker, hvorefter klassen i fællesskab skulle finde et udtryk, som beskrev det samlede antal tændstikker, eleverne havde til sammen. Dette blev gentaget med to andre hold elever.

Som en kort optakt til det første opgaveark, der findes på bilag 3, fik eleverne forklaret, at de skulle arbejde med at opskrive forskellige udtryk for antallet af tændstikker. Allerførst skulle de forskellige grupper, bestående af to elever, læse opgaveteksten og ikke mindst eksemplerne godt igennem og forklare for hinanden, hvad opgaven gik ud på. Derefter fik de udleveret en pose indeholdende en håndfuld løse tændstikker og 5 indpakkede tændstikæsker. Det blev pointeret, at det ikke var et krav, at de brugte de fysiske tændstikker og æsker til alle opgaver. Dette ark blev efterfølgende gennemgået og som det fremgår af dialogsekvensen under del 2 på bilag 2, blev bogstavernes repræsentation hele tiden italesat ved, at eleverne skulle forklare, hvad deres valgte bogstav stod for.

Dette fokus på bogstavets betydning samt betydningen for valget af et givent bogstav gik igen på det efterfølgende opgaveark, ark 2, som findes på bilag 4. Her skulle eleverne igen arbejde sammen to og to med at opskrive ligninger og efterfølgende finde det tal, som bogstavet skulle repræsenterer for at ligningen blev sand. Hver opgave indeholdt et forskelligt bogstav, som repræsentant for det ukendte tal. Formålet med dette kommer til udtryk i den udvalgte dialogsekvens i del 3 bilag 2. Her spørges der ind til forskellige gruppers svar til de samme opgaver, men grundet opgavens udformning kan samme opgave rumme forskellige svar. Dette havde til hensigt at gøre eleverne opmærksomme på, at samme bogstav kan repræsentere forskellige tal alt afhængigt af den givne kontekst det optræder i, dog vil det altid være fælles for dem, at de repræsenterer en talværdi.

I de efterfølgende moduler blev der ofte trukket eksempler frem med henvisning til disse opgaver og fremgangsmåder, ligesom tændstikkerne og æskerne lå i klassen til fri afbenyttelse i timerne.
En vigtig pointe, som gjaldt hele forløbet, var mit fokus på bogstavernes betydning og ikke mindst sprogliggørelse af at tydeliggøre dette. Hver gang et bogstav blev skrevet i et udtryk, blev der spurgt ind til den konkrete repræsentation. Samtidig blev elevernes sprogliggørelse af deres forskellige løsningsforslag og fremgangsmåder til opgaverne også vægtet højt.

6.4. De efterfølgende refleksioner

Forløbet overraskede positivt på mange måder. I timerne oplevede jeg glade elever, som var motiverede og havde lyst til at deltage - både i fælles klassesamtaler, i gruppearbejdet samt i forbindelse med individuelle opgaver. Timerne var præget af stor koncentration og eleverne gik altid i gang med opgaverne med stor lyst og motivation. En elev kom ligefrem op til mig efter timen for at sige, at han syntes, at ligninger var rigtig sjovt. Elevernes faglige udbytte fremgik af de udleverede spørgeskemaer, som vidnede om en øget faglig viden samtidig med, at elevernes spørgsmål og forklaringer i undervisningen tydede på en styrkelse af deres repræsentationskompetence. Med udgangspunkt i at undersøge lærerens muligheder i forhold til at støtte elevernes udvikling af deres repræsentationskompetence, vil jeg i det følgende forholde mig analytisk til forløbet. Jeg vil i den forbindelse undersøge de forskellige aspekter, jeg gennem den teoretiske del har fundet betydningsfulde i forhold til at arbejde med elevers repræsentationskompetence. Dette vil jeg gøre med udgangspunkt i det socialkonstruktivistiske læringssyn og herunder bruge Cobb & Yackels fortolkningsramme, som en analysemodel for forløbets læringspotentialer og faglige kvaliteter indenfor algebra.

Først følger en redegørelse for teorien.

7. Paul Cobb og et socialkonstruktivistisk læringssyn

Et socialkonstruktivistisk læringssyn indeholder elementer fra både konstruktivismen, nærmere betegnet radikalkonstruktivismen, repræsenteret ved Ernst von Glasersfeld, og fra den kulturhistoriske skole med den russiske psykolog Lev Vygotsky i spidsen (Skott, Jess & Hansen 2008A, s. 133). Fra radikalkonstruktivismen henter det socialkonstruktivistiske læringssyn et individuelt, psykologisk perspektiv på læring. I radikalkonstruktivismen anses viden og læring som individuelle anliggender, der konstrueres på baggrund af erfaringer og aktivt opbygges af det enkelte individ (ibid., s. 70). Den kulturhistoriske skole bidrager med et socialt perspektiv på læringsbegrebet, hvor sproget spiller en central rolle. Sproget ses som værende et redskab til både kommunikation, tænkning og bevidsthed. Betydningen af socialt samspil og sociale fællesskaber samt brug af sprog i lærings- og udviklingsprocessen vægtes højt (Imsen 2008, s. 32). Læring i den socialkonstruktivistiske optik kan derfor redegøres som en individuel meningsskabelse og aktiv konstruktion, der foregår i et socialt samspil, hvorfor kundskab er socialt konstrueret med sproget som en yderst betydningsfuld faktor.

Matematikdidaktikeren Paul Cobb er en frontfigur indenfor dette socialkonstruktivistiske læringssyn. Han har i en årrække arbejdet med elevers læring og udvikling af matematik, hvor både teori og praksis har spillet en betydelig rolle i den overbevisning, at de er refleksivt relateret og at der derved er tale om en gensidig påvirkning de to imellem (Cobb & Yackel 1996B, s. 175). Dette har medført et stort empirisk arbejde som grundlag for hans læringsteori. Hans udgangspunkt var oprindeligt en konstruktivistisk psykologisk tilgang, men han oplevede undervejs et behov for også at medtage et socialt perspektiv, når elevers læring i et klasserum skulle analyseres, idet denne læring netop finder sted i en social kontekst (ibid., s. 176). Cobb ønskede i samarbejde med kollegaen, Erna Yackel, at koordinere en analysemodel for processerne i et matematisk klasserum, som netop tog højde for denne erfaring. Resultatet heraf blev en fortolkningsramme, som skelner mellem et psykologisk og et socialt perspektiv på læring i klasserummet og samtidig inddrager elevers såvel som lærerens rolle i forhold til klassens læringsmuligheder. Det sociale perspektiv fokuserer på interaktionen i klassen, mens det psykologiske perspektiv fokuserer på de individuelle elevers (eller lærerens) deltagelse og bidrag til den faglige udvikling i klassens fælles arbejde (ibid., s. 176). Under det sociale perspektiv har Cobb og Yackel fundet det hensigtsmæssigt at skelne imellem tre aspekter, som de anser for klassens ”mikrokultur”. Hver af disse påvirker og bliver påvirket af et psykologisk aspekt, som findes under det psykologiske perspektiv. Der er derfor en refleksiv relation mellem det sociale og det psykologiske perspektiv, hvor begge har betydning for klassens læringsprocesser. Fortolkningsrammen er opskrevet herunder:

Aspekt:	**Det sociale perspektiv**	**Det psykologiske perspektiv**
1.	**C1.** Klasserummets sociale normer.	**C2.** Forestillinger om ens egen og andres rolle og om den generelle karakter af matematisk aktivitet i skolen.
2.	**C3.** Socio-matematiske normer	**C4.** Matematiske forestillinger og værdier.
3.	**C5.** Klasserummets matematiske praksisser.	**C6.** Matematiske begreber og aktiviteter.

(Egen oversættelse og fortolkning fra Cobb & Yackel 1996B, s. 177)

Aspekterne, i både deres sociale og psykologiske perspektiv, kan nærmere beskrives som følger:

1. aspekt omhandler de normer og forestillinger, som har betydning for hvad der foregår i klassen og er derfor ikke kun gældende i matematik. De sociale normer behøver dog ikke være ens for alle fag. De sociale normer i klasserummet (C1) karakteriserer de måder som klassen forventes at være sammen på samt det eleverne forventes at lære. Disse normer udvikles gennem et socialt samspil mellem elever og lærer og eleverne indbyrdes. Det kan f.eks. være måden man forklarer og begrunder en løsning på, at man forsøger at forstå andres

forklaringer med mere. Ved at deltage i dette samspil vil eleverne tage de sociale normer til sig og herigennem blive mere bevidste om deres egen og andres rolle samt den generelle karakter af matematisk aktivitet (C2), som igen vil påvirke de sociale normer i klasserummet. (ibid., s. 178).

2. aspekt omhandler de normer og forestillinger, som er mere direkte relateret til matematikfaget. De socio-matematiske normer (C3) omhandler de normative aspekter i forhold til elevers matematiske aktivitet. Det kan f.eks. dreje sig om, hvad der tæller som en god matematisk løsning, hvad der er en acceptabel matematisk forklaring, hvad der er et godt matematisk spørgsmål med videre. Disse udvikles i det sociale samspil, som klassen indgår i, gennem "forhandlinger" mellem eleverne indbyrdes og mellem elever og lærer. Det er derfor ikke sådan, at alle deltagere i en klasse har samme socio-matematiske normer. Hver elev konstruerer sine egne matematiske forestillinger og værdier (C4), som igen gør dem i stand til at optræde som selvstændige medlemmer af klassens matematiske fællesskab og herigennem deltage i genforhandlingen af de socio-matematiske normer. (ibid., s. 178f).

3. aspekt omhandler konkrete måder at arbejde med matematik på. Klasserummets matematiske praksis (C5) omhandler etablerede forståelser, som betragtes som indlysende og som hverken kræver argumentation eller yderlig forklaring. Igennem elevernes matematiske begreber og aktiviteter og derved deres faglige forståelse (C6), kan de aktivt bidrage til udviklingen af klassens matematiske praksis, når de rekonstruerer deres individuelle matematiske aktiviteter og omvendt bliver disse rekonstruktioner muliggjort af elevernes deltagelse i den matematiske praksis. (ibid., s. 179f).

Særligt de socio-matematiske normer pointeres som værende væsentlige i forhold til at kunne redegøre for og analysere de matematiske aspekter omkring lærers og elevers aktivitet i det matematiske klasserum (Cobb & Yackel 1996A, s. 474). Dette skyldes ikke mindst det ekstra læringspotentiale som udspringer, når elever forsøger at skabe forståelse gennem andres forklaringer, ved at sammenligne andres løsningsforslag med deres egne og bedømmer ligheder og forskelle (ibid., s. 466), hvilket var indbefattet i C3. Samtidig vægter de socio-matematiske normer også lærerens rolle i undervisningen, der herigennem bliver "…*a representative of the mathematical community.*" (ibid., s. 474).

8. Undervisningsforløbet i et analytisk perspektiv

Tankerne bag mit undervisningsforløb har mange fællestræk med det socialkonstruktivistiske læringssyn. Den meget tydelige sprogliggørelse af bogstavernes repræsentation i de forskellige sammenhænge, prioriteringen af elevforklaringer i plenum samt fokus på gruppearbejde står i relation til viden som en social konstruktion og læring som en del af sociale praksisser. Samtidig blev eleverne præsenteret for et undervisningsmateriale, der både i sin udformning og tilgang, forsøgte at tage højde for elevernes forskellige individuelle faglige forståelser og derved tog hensyn til læring som et individuelt anliggende. Ydermere hersker der stor opmærksomhed omkring repræsentationer i matematikundervisningen indenfor socialkonstruktivismen (Skott, Jess & Hansen 2008A, s. 166), hvilket var et væsentligt element i forløbet.

8.1 Forløbet set i lyset af Cobb & Yackels fortolkningsramme

De sociale normer i en klasse udvikles gennem et samspil mellem eleverne indbyrdes og mellem elever og lærer. De samme sociale normer vil derfor ikke nødvendigvis være at finde i to forskellige klasser med samme underviser, ligesom den samme klasse, kan have udviklet forskellige sociale normer alt afhængig af hvilken lærer, der er til stede i klassen. Inden begyndelsen af vores egen undervisning i praktikken forsøgte vi at gøre os bekendt med nogle af de allerede etablerede sociale normer i klassens matematiktimer. Dette gjorde vi ikke mindst på grund af den korte periode vi var i klassen og derfor helst ville undgå genforhandling af de sociale normer. Vi var også samtidig bevidste omkring det uundgåelige skift eleverne ville opleve ved, at deres matematikundervisning pludselig blev varetaget af en anden end deres faste matematiklærer. Dog håbede vi, at et forhåndskendskab til klassens måde at arbejde på i matematik og ikke mindst deres forestilling om at være elev i netop deres klasse, kunne medvirke til at skabe ro og tryghed i vores egen undervisning. Gennem samtaler med vores praktiklærer samt observationer af hans undervisning den første uge i vores praktikforløb forsøgte vi at blive opmærksomme på disse normer. Praktiklæreren selv beskrev eleverne som yderst flittige og læringsvillige. Han fortalte om egne oplevelser af, hvordan eleverne var motiverede i timerne og meget aktive ved klassesamtaler og uden beklagelse eller brok gik i gang med dagens arbejde. Samme indtryk fik jeg gennem vores observationstimer og ligeledes i mine undervisningstimer, hvor jeg også her oplevede eleverne udvise stor tålmodighed overfor hinanden ved sjældent at tale i munden på hinanden i de fælles samtaler, men give plads til hinandens forklaringer og spørgsmål. De accepterede læreren som klassens ordstyrer og havde tillid til at læreren således sikrede en retfærdig og lige behandling af alle elever. På intet tidspunkt overhørte jeg eller mine medstuderende andre elever udtale sig nedladende overfor klassekammeraters forklaringer eller spørgsmål. Eleverne virkede til at lytte til hinanden. Dette kunne tyde på, at det var blevet en del af klassens sociale norm, at eleverne arbejdede i timerne og var indstillet på, at bidrage

til og deltage i denne læringsproces. Der var uden tvivl også etableret sociale normer for elevernes syn på og accept af læreren i klassen. Det var læreren som bestemte, hvem der havde ordet og lærerens valg blev respekteret af eleverne. Ydermere blev læreren opfattet som en autoritet i klassen, som man rettede sig efter. Dette kan ses i lyset af en oplevelse i en af mine første undervisningstimer. Der var kun et par minutter tilbage af timen, hvilket jeg gjorde eleverne opmærksomme på og bad dem pakke sammen og slutte for den dag. Dette gjorde eleverne, men blev herefter stående bag deres stole lettere afventende dog uden beklagelser. Jeg selv reagerede lettere forbløffet over elevernes manglende initiativ til at forlade lokalet, indtil det faldt mig ind, at jeg som underviser ikke havde givet min tilladelse. Det var derfor først efter jeg havde sagt ordene: ”*I må gerne gå, tak for i dag*”, at eleverne forlod lokalet. De sociale normer i klassen stillede tilsyneladende store krav til læreren i forhold til en tydelig rammesætning for og fokus på egen sproglig fremtoning i undervisningen.

I undervisningsforløbet blev eleverne sat til at forklare deres fremgangsmåder og løsningsforslag for hinanden. På bilag 5 er et uddrag fra en klassesamtale i modul 2, som er en opsamling af elevernes arbejde i grundbogen. Sekvensen omhandler elevernes arbejde med at finde Lottes vægt, når de kendte Lises, samt hvor meget de to piger vejede tilsammen. I denne gennemgang bliver eleverne bedt om at forklare deres fremgangsmåde. Efter Linda har forklaret sin tilgang, spørges der ind til andre løsninger. Dette var fra min side underforstået som værende andre fremgangsmåder, som var matematisk forskellig fra Lindas. Dette bliver ikke pointeret eksplicit, men det kan tyde på, at denne forståelse var en del af klassens socio-matematiske normer, eftersom de to andre elevforklaringer bar præg af helt andre matematiske overvejelser. Linda havde taget udgangspunkt i den samlede vægt og halveret, Jakob tog udgangspunkt i Lises vægt og regnede op efter, mens Mette foretog en subtraktion mellem de to kendte værdier. Ved at italesætte disse forskellige fremgangsmåder, blev det muligt for eleverne at vidensdele deres tilgang med hele klassen. På den måde blev der skabt rum for et yderligere læringspotentiale, som eleverne kunne udnytte i forhold til at udvikle deres individuelle faglige forståelse.

Grundet den korte periode jeg var i klassen var jeg bevidst om, at det kunne være svært at få etableret nye socio-matematiske normer i klassen. Jeg søgte dog alligevel at skabe grobund for at eleverne på sigt kunne acceptere matematiske udtryk indeholdende bogstaver som resultater på opgaver. Dette aspekt var medtænkt i det introducerende arbejde med elevernes bogstavforståelse i modul 1, hvor det første elevark (bilag 3), netop gav bogstavudtryk, som svar på opgaverne og som eleverne ikke i denne kontekst kritiserede som svar jf. dialogen på bilag 2, del 2.

Et andet væsentligt fokus i forløbet var italesættelsen af bogstavernes betydning. Dette fremgår både af den føromtalte dialog fra modul 1 (bilag 2, del 2), hvor både Mette og Frederik beskriver bogstavet som en repræsentant for antallet af tændstikker. Samtidig viser sekvensen fra bilag 5 også, hvordan Mads forklarede, at *x*'et stod for Lottes vægt. Denne italesættelse i det fælles klasserum var medvirkende til at gøre forståelse for bogstaver som repræsentanter for tal til en del af klassens socio-matematiske normer, som gennem deres refleksive relation til elevernes individuelle faglige forståelse ville kunne afspejles heri. Når klassens fællesskab kunne acceptere den matematiske værdi i bogstavers roller og betydning og bruge dem herefter, var der stor sandsynlighed for at denne viden ville påvirke de enkelte elevers bogstavforståelse.

Forhåbningen med forløbet var også, at eleverne på sigt ville opfatte bogstaverne i forhold til Küchemanns kategori 2, som en selvfølge og at denne bogstavforståelse derved blev en del at klassens matematiske praksis. Dette ville betyde, at man i klassen ikke ville finde det nødvendigt at forklare betydningen af bogstavernes repræsentation, men at det ville blive anset for værende indlysende for klassens deltagere. Et indblik i elevernes bogstavforståelse var netop baggrunden for det tidligere omtalte spørgeskema, som eleverne udfyldte i både modul 1 og modul 5. Her skulle eleverne forklare deres forståelse af bogstavet *x* i en konkret ligning samt deres forståelse af bogstavbrug i matematik generelt. Som det fremgår af bilag 6 kunne næsten halvdelen af eleverne inden forløbet forklare *x*'s betydning i den konkrete kontekst ud fra en korrekt bogstavforståelse tilhørende Küchemanns kategori 2, mens dette kun gjaldt for godt en tredjedel i forhold til den mere generelle bogstavforståelse. Der var derfor belæg for at arbejde med at gøre en korrekt bogstavforståelse til klassens matematiske praksis. Sammenholdt med elevernes besvarelse efter forløbet i modul 5, ses en klar positiv udvikling af deres bogstavforståelse. Her indikerer alle elevbesvarelser en bogstavforståelse tilhørende Küchemanns kategori 2 for *x* i den konkrete kontekst. Kun en fjerdedel er endnu fastholdt i kategori 1 i forhold til den generelle bogstavforståelse. Det bør dog bemærkes, at nogle af forklaringerne i kategori 1 kan være misvisende. I de tre udvalgte elevforklaringer til dette spørgsmål jf. bilag 6 bliver bogstaverne omtalt som værende "*noget ukendt*" eller "*noget man ikke ved*". Eftersom bogstaverne ikke eksplicit forklares som værende talværdier, men i disse forklaringer også kunne være opfattet som symboler, kan jeg ikke med sikkerhed vide, om det eleverne hentyder til reelt er tal, hvilket er begrundelsen for deres placering i kategori 1. Denne tvivl skyldes ikke mindst formuleringen af det pågældende spørgsmål. Man kunne eksempelvis tænke, at en tilføjelse af et underspørgsmål, hvor eleverne skulle forklare, *hvad* bogstaver stod for, kunne have været medvirkende til at komme denne tvivl til livs. Overordnet set, vil jeg dog mene, at der er belæg for at kunne konkludere, at en etablering af Küchemanns anden forståelseskategori i klassens matematiske praksis er tæt på at være sket.

I undervisningen var der lagt særligt vægt på det sociale læringsperspektiv, hvilket, ud fra Cobb og Yackels principper, har indvirkning og indflydelse på elevernes individuelle faglige forståelse. Men de individuelle forståelser var også medtænkt i det udarbejdede materiale til modul 1. I introduktionen til elevsiderne tilknyttet modul 1 blev eleverne præsenteret for fysisk konkrete tændstikker og indpakkede tændstikæsker, som kunne støtte dem i deres opgaveløsning. Skønt opgaveformuleringen til ark 1, bilag 3, lagde op til, at eleverne brugte disse repræsentationer rent fysisk i hele deres arbejdsproces, blev det sprogligt i optakten påpeget, at det ikke var et krav. Dette var bevidst for at tilgodese de elever, som ikke havde svært ved at se bogstaverne som repræsentanter for tal. Som det fremgik af spørgeskemaet, havde enkelte elever allerede inden forløbets begyndelse en korrekt bogstavforståelse. Forhåbningen i forhold til dem, lå i, at de forholdsvis hurtigt kom igennem de konkrete opgaver under opgave 1 på ark 1 og kunne udfordre hinanden i arkets opgave 2, hvilket også sås i undervisningen. Størstedelen af eleverne brugte kun de fysiske repræsentationer til de første underopgaver og kunne herefter nøjes med at kigge på tegningen. Den svage gruppe fastholdt brugen af tændstikker og æsker til alle opgaver. Dette resulterede i en undervisningstime med mulighed for at bruge de konkrete repræsentationer i det omfang hver elev eller gruppe havde behov for. Selvom eleverne arbejdede sammen to og to, var det tydeligt i enkelte grupper, at den ene efter at have brugt tændstikkerne i enkelte opgaver ikke længere behøvede dem, mens den anden i gruppen fortsatte med at bruge dem. Dette gav oplevelsen af en klasse, hvor alle elever kunne arbejde og ikke mindst, at alle elever satte stor pris på de individuelle udfoldelsesmuligheder. Selv klassens faste matematiklærer var positiv overrasket over klassen og om to af klassens svage elever udtalte han efter timen:

> *"Det var virkelige dejligt at se, hvordan både Line og Sara bare arbejdede derud af. De plejer ellers at have rigtig svært ved det og være meget usikre, men materialet talte lige til dem. Line havde lys i øjnene og havde virkelig en optur i dagens undervisning, hun var med og forstod hvad der foregik, det er langt mere end hvordan jeg oplever hende til dagligt."*.

Som tidligere nævnt var undervisningen i modul 1 et vigtigt udgangspunkt for hele forløbet og erfaringer herfra blev hevet frem i de efterfølgende moduler. Dette fremgår bl.a. af dialogsekvensen fra modul 2, bilag 5, hvor jeg i fjortende linje henviser til de indpakkede tændstikker for at gøre eleverne opmærksom på fællesnævneren for problemstillingen med de indpakkede tændstikæsker og Lottes ukendte vægt. På den måde kom eleverne frem til at bruge et bogstav til at beskrive Lottes ukendte vægt i den pågældende ligning, ligesom de i det foregående modul havde brugt et bogstav som repræsentant for det ukendte antal tændstikker i æskerne.

På baggrund af Cobb & Yackels analysemodel har jeg hermed fremhævet de kvaliteter og læringsmuligheder forløbet besad ud fra et socialt og et individuelt, psykologisk læringsperspektiv. Både valget af undervisningsmateriale, herunder opgavetyper, samt arbejdsformen med fokus på både det sociale og det individuelle, viste sig at være befordrende for at eleverne kunne opnå de opstillede mål for undervisningen og herunder udvikle deres repræsentationskompetence.

8.2. Bergsten og Duval

Bergsten betegner den indledende algebra, som den ”kritiske fase” jf. afsnit 4.1. Det er her eleverne møder bogstaver, som repræsentationer for tal, og derfor her deres bogstavforståelse tager form. Bergstens betegnelse som ”kritisk” er efter min mening ikke henvendt til selve fasen. Derimod er den kritiske hentydning sigtet mod de konsekvenser, som vil være at finde hos en elev, hvis fundament for en korrekt bogstavforståelse, ikke er blevet etableret i den indledende algebra. Arbejdet i den indledende algebra er derfor af særlig betydning for elevernes bogstavforståelse, hvilket bør have særlig opmærksomhed i lærerens didaktiske overvejelser.

I mit undervisningsforløb søgte jeg at imødekomme en korrekt bogstavforståelse hos eleverne gennem det indledende arbejde med ”Bogstaver er tal vi ikke kender”. Problemstillingen med det ukendte antal tændstikker i de indpakkede æsker, gav eleverne et behov for at finde på noget nemmere, noget der var mere hensigtsmæssigt for dem at regne med. Brugen af et bogstav som repræsentant for antallet, blev foreslået af Emily, der ud fra sin besvarelse af spørgeskemaet (bilag 6) allerede inden forløbet kendte til og forstod brugen af bogstavers repræsentationer. Gennem klassesamtalen bliver hendes forståelse videregivet til hele klassen, som derigennem kunne opleve bogstavet som en hjælp frem for et bogstav, der ikke havde noget at gøre i et matematisk udtryk. Ved at bogstavets betydning hele tiden blev italesat, var der mindre mulighed for at eleverne fik den misopfattelse, at bogstavet stod i stedet for et objekt eller var en forkortelse.

Der blev i undervisningen gjort meget ud af at få eleverne til at læse opgaverne igennem inden de begyndte deres løsningsforslag og ikke mindst selve opgaveteksten. Dette skyldes ikke mindst et kendskab til mange elevers iver efter at komme i gang og blive ”først færdig” og derved overse vigtige kvaliteter i opgaveteksten, der er meningsbærende for opgaveløsningen. Et kendskab til og forståelse for en opgavetekst kan være det som afgør om en løsningsproces blot går ud på at finde et tal der passer i ligningen eller om den drejer sig om at finde svaret på en problemstilling. Et kendskab til konteksten har stor værdi i forhold til elevers forståelse af bogstavers betydning.

Dette argumenteres der også for i Epsilon, som kommer med følgende begrundelse: ”*Giver konteksten mening, så er det lettere for eleverne at tildele algebraiske notationer og undervejs i løsningsprocessen at kontrollere, om de er på rette vej”* (Skott, Jess & Hansen 2008B, s. 217). Det var derfor ikke uvæsentligt, at de opgaver eleverne arbejdede med i undervisningen bar præg af regnehistorier og virkelighedstro problemstillinger, hvor eleverne kunne forstå den sammenhæng, som bogstavsymbolerne indgik i. Dette var medvirkende til at give bogstaverne mening og herigennem støtte eleverne i oversættelses- og tolkningsfasen i den algebraiske cyklus, hvilket som tidligere nævnt blev efterlyst af Bergsten.

Disse to faser blev desuden også styrket gennem den sproglige dimension. Den sproglige dimension blev inddraget gennem klassesamtalerne med sprogliggørelse af elevernes individuelle ideer og løsningsforslag samt gennem elevernes gruppearbejde, hvorved eleverne fik mulighed for at sætte ord på deres tanker. Således kunne de blive mere klar over, hvad de selv tænkte, hvorved den mundtlige fremstilling ofte kunne medvirke til en større forståelse og ikke mindst en mulighed for at eleverne kunne drage nytte af hinandens læring og forståelse jf. Cobb og Yackel. Men en anden væsentlig pointe ved den sproglige dimension er også det nedskrevne sprog. I forhold til oversættelses- og tolkningsfasen opfatter Bergsten, ligesom Fælles Mål (Undervisningsministeriet 2009, s. 52) og Anders Palm (Palm 2008, s. 41), algebraen som værende ”matematikkens eget sprog” (Bergsten m.fl. 1997A, s. 26). Det algebraiske arbejde bør derfor sigte mod at gøre eleverne i stand til at beherske dette sprog. Dette indbefatter i særdeleshed at kunne skelne og ikke mindst kunne oversætte mellem dagligdagssprog og det matematiske sprog, som netop er udfordringen i oversættelses- og tolkningsfasen. Dette aspekt indgik i de nævnte opgavetyper, som eksempelvis i regnehistorier, hvorved alle tre faser i den algebraiske cyklus kom spil i elevernes arbejde.

Grundet den tidligere kobling mellem faserne i den algebraiske cyklus og Duvals transformationer samt beskrivelsen af de involverede matematiske processer, som forefindes i arbejdet med regnehistorier, fremgår Duvals transformationer, treatments og conversions, som væsentlige elementer i forløbet. Begge disse er indbegrebet af elevernes repræsentationskompetence og der er derfor belæg for at konkludere forløbet til at være med til at udvikle elevernes kundskaber og færdigheder indenfor denne kompetence.

Treatments kunne fortolkes som værende en påkrævet handling i den algebraiske cyklus' omskrivningsfase, mens conversions kunne fortolkes, som de matematiske processer eleverne gennemgår i oversættelses- og fortolkningsfasen. Sidstnævnte blev af Duval fremhævet som den type af transformationer, der skaber de største vanskeligheder for eleverne (Duval 2008, s. 115). Som en hjælp til at støtte elevernes conversions, foreslår Duval et fokus på at inddrage mange typer

repræsentationer i undervisningen (ibid., s. 126). Når eleverne har kendskab til og er blevet fortrolige med mange forskellige repræsentationsformer, vil det være lettere for dem at gennemskue de indbyrdes forbindelser mellem de forskellige repræsentationer og derved i at foretage conversions. Samtidig fremhæver han hjælperepræsentationer, som en hjælp til at støtte eleverne i oversættelsesprocessen. Hjælperepræsentationer er ikke en del af det semiotiske system, men kan f.eks. være tændstikker (ibid., s. 110). Dette synspunkt støtter dermed mit valg omkring brugen af tændstikker og æsker i forløbet, idet disse hjælperepræsentationer støttede eleverne i at udføre conversions fra det multifunktionelle sproglige register (R1) til det monofunktionelle sproglige register (R2).

Hvis man sætter undervisningsforløbet ind i et overordnet perspektiv og således forsøger at relatere det til mit udgangspunkt for opgaven omkring udvikling af elevers repræsentationskompetence indenfor algebra. Mener jeg, på baggrund af mit teoretiske og analyserende arbejde, at kunne drage følgende slutning på min tilgang til at arbejde med elevers repræsentationskompetence:
Ved at inddrage de fysiske tændstikker og æsker i undervisningen, blev den abstrakte forestilling af bogstaver som talrepræsentanter langt mere konkret for eleverne og derved lettere at inddrage i klassens sociale praksis. Ved at prioritere den sproglige italesættelse af bogstavernes betydning i klassen, blev denne forståelse til en del af klassens matematiske praksis og bogstaver i matematiske udtryk blev en accepteret del af klassens socio-matematiske normer. Gennem dettes refleksive relation til elevernes individuelle faglige forståelse, ville elevernes arbejde med den algebraiske cyklus blive styrket, da brugen af bogstavsymboler ikke ville fremstå som meningsløs. Eleverne ville herigennem kunne arbejde med alle tre faser og således beherske både treatments og conversions, som ville blive styrket og dermed øge elevernes repræsentationskompetence.

9. At arbejde med elevers repræsentationskompetence

Matematikundervisning skal styrke og udvikle elevers repræsentationskompetence. Jeg har derfor i denne opgave fundet argumentation for at denne kompetence netop er indbegrebet af Duvals to typer transformationer, treatments og conversions. Vil man som underviser, støtte elevers udvikling af repræsentationskompetencen bør man derfor gå et lag længere ned og fokusere på, hvilke processer det derved kræver udvikling af. At udføre treatments kræver, at eleverne kan begå sig indenfor et givent register. I forhold til det algebraiske arbejde, vil dette primært drejer sig om registrene R1 og R2, men også R3 i forbindelsen med funktioner. Disse kan styrkes gennem opgaver, som kræver brug af netop den givne matematiske proces. En treatment i R2 er særlig væsentlig i forbindelse med omskrivningsfasen i den algebraiske cyklus, hvor eleverne netop skal omskrive et

givent algebraisk udtryk. Denne handling, som kan opleves som vanskelig for nogle elever, kan ofte skyldes, at de involverede bogstavsymboler fremstår som meningsløse. Derfor er det vigtigt at have fokus på elevernes bogstavforståelse i undervisningen. Eleverne skal få en forståelse for bogstaverne som repræsentanter for tal, hvorved de kan arbejde med dem gennem en treatment. At skabe en korrekt bogstavforståelse kan bl.a. ske gennem klassens sociale praksis, hvor en fælles forståelse for bogstaver som repræsentanter for tal derfor kan blive en del af elevernes individuelle virksomhed. Dette kan ske gennem et fokus på brugen og betydningen af bogstavsymbolerne, der hele tiden italesættes og ikke anses som umiddelbart indlysende. Faldgruben her er, hvis læreren på et givent stadie opfatter den korrekte bogstavforståelse som værende en etableret del af klassens matematiske praksis og derved i sin undervisning overser muligheden for at klassens matematiske praksis ikke nødvendigvis er en del af alle elevers individuelle faglige forståelse. Denne problematik bør underviseren være opmærksom på og gennem individuelle opgaver, forskellige evalueringsformer og evt. samtaler forsøge at belyse elevernes individuelle forestillinger om.

Det andet element i repræsentationskompetencen er conversions. Her handler de matematiske processer om at kunne foretage registerskift og derved kunne oversætte mellem forskellige repræsentationsformer. Denne er den mest komplekse af de to transformationer og kræver, at eleverne kender til brug af flere forskellige repræsentationsformer. Der bør derfor i undervisningen arbejdes med dette. Samtidig kan konkrete hjælperepræsentationer være gavnlige i forhold til at støtte eleverne i at foretage de forskellige oversættelser. Disse oversættelser er en vigtigt del i den algebraiske cyklus og anklages for at blive nedprioriteret i undervisningen til fordel for omskrivningsfasen. Ved at arbejde mindre med disse komplekse processer, får eleverne svært ved at blive fortrolige med dem. Matematikundervisningen bør derfor prioritere de tre faser i den algebraiske cyklus lige højt, hvilket også vil give mening til og forståelse for betydningen af bogstavsymbolerne, som efter min overbevisning, herved vil mindske muligheden for algebraiske vanskeligheder.

10. ”Frugtsalat-algebra” - en klassisk vej til misopfattelser?

I min tredjeårspraktik havde jeg matematik i en niende klasse. Det var i denne forbindelse, jeg blev særlig opmærksom på de vanskeligheder bogstaver i matematiske udtryk kunne volde eleverne. Eleverne gik i stå, når de skulle udføre regneoperationer på bogstavsymboler, skønt de uden problemer kort forinden havde gjort det med et tal[1]. Jeg blev derfor nysgerrig efter at undersøge

[1] I en undervisningstime bad en elev om hjælp til omskrivningen af ”y opløftet til en halv”. Jeg valgte at spørge ind til hans løsning af den forrige opgave, hvor omskrivningen skulle ske af ”7 opløftet til en halv”. Hertil svarede han: ”*Jamen, det er jo kvadratrod syv. Det er ikke det samme her, for det er jo ikke et tal*”

elevernes bogstavforståelse og forsøge at blive klogere på, hvori deres vanskeligheder bestod. Til dette formål brugte jeg et spørgeskema. I dette skulle eleverne bl.a. forklare betydningen af bogstaverne i udtrykket: $3a + 2b$, hvortil en regnehistorie blev foreslået som en mulig tilgang. Spørgsmål samt udvalgte besvarelser fremgår af bilag 7. Kun 17 ud af i alt 26 elever havde besvaret opgaven og heraf var tre besvarelser så sprogligt identiske, at de grundet mistanke om afskrivning blev anset for en. Ud af disse 15 besvarelser var fem korrekte forklaringer, som tydeligt beskrev *a* og *b* som variable og herved som udtryk for tal. Mere rystende var opdagelsen af fem andre forklaringer. Her beskrev eleverne bogstaverne som objekter og mere præcist henviste til, at *a* stod for æbler/appelsiner og *b* for bananer og en elev skrev sågar: *3 æbler + 2 bananer = 5 frugter.* Disse elever havde tydeligvis en opfattelse af bogstaver som symboler for objekter og deres besvarelser indikerede en forståelse af, at $3a$ stod for 3 gange ”noget” frem for 3 gange et tal. Dette gjorde elevernes vanskeligheder langt mere forståelige, for hvem ville ikke finde det vanskeligt at foretage regneoperationer på objekter?

Disse forklaringer ledte opmærksomheden hen på ”frugtsalat-algebra” (Pimm 1981, s. 131). I ”frugtsalat-algebra” bliver bogstaver i matematiske udtryk netop omtalt som frugter, som starter med det givne bogstav. Bogstavet *a* er typisk en appelsin eller et æble, grundet det engelske apple, og bogstavet *b* omtales som banan og så fremdeles. Dette bruges ofte i reduktionslæren, hvor eleverne lærer, at de ikke kan ”lægge appelsiner og bananer sammen” så de herigennem lærer at skelne mellem bogstaverne som forskellige repræsentationer. Denne tilgang husker jeg også fra min egen skolegang, hvor sætningen: ”*Man må ikke blande appelsiner og bananer*” stadig sidder fast i erindringen omkring reduktion. Under min førsteårspraktik var jeg desuden selv med til at undervise ud fra denne tilgang.

I min førsteårspraktik underviste jeg tre fjerdeklasser i bl.a. reduktion, hvor jeg tog udgangspunkt i deres faste bogsystem, Format. Dette materiale anvender ”frugtsalat-algebra”, som en tilgang til reduktion ved at bruge tegnede appelsiner, bananer og citroner, som billeder på de variable *a*, *b* og *c*. Dette har til hensigt at gøre eleverne opmærksomme på at skelne mellem de forskellige bogstaver ved reduktion af matematiske udtryk. Tegninger og eksempler fra bogsystemet fremgår af bilag 8. Det skal bemærkes, at disse er hentet fra Format 5 Elevbog, grundet problemer med at fremskaffe Format 4 Elevbog, som jeg anvendte i praktikken. Men skønt arbejdssiderne ikke er identiske, er fremgangsmåden og tilgangen ens for begge bøger og eksemplerne fra Format 5 er derfor ganske lig de eksempler jeg underviste ud fra i Format 4. I min daværende undervisning brugte jeg i den forbindelse udklippede appelsiner, bananer og citroner, som blev sat op på tavlen som udgangspunkt for forskellige opskrevne matematiske udtryk. Eleverne brugte disse fysiske repræsentationer til at

reducere ud fra ved bl.a. at samle appelsinerne i en bunke, bananerne i en anden og ligeledes med citronerne, hvorefter vi på tavlen skrev op hvor mange *a*'er, *b*'er og *c*'er der var i alt. Jeg var altså på den måde medvirkende til at støtte en bogstavopfattelse af bogstaver som symboler for objekter, i dette tilfælde frugter - en bogstavsopfattelse jeg nu forsøger at arbejde for at undgå. Skønt formålet med denne tilgang var at hjælpe eleverne til at kunne skelne mellem de forskellige bogstavsrepræsentationer, kan samme tilgang virker i direkte modstrid med skabelsen af en korrekt bogstavforståelse i forhold til Küchemanns kategori 2.

Niendeklassens daværende matematiklærer havde først overtaget klassen i ottende og havde ikke kendskab til elevernes tidligere reduktionsarbejde. Samtidig havde skolen ikke noget fast bogsystem eller tradition for at klasserne havde faste grundbøger, så det var derfor ikke muligt at finde bevis for at klassen tidligere havde beskæftiget sig med "frugtsalat-algebra". Dog mener jeg, at de tydelige og eksplicitte forklaringer af bogstaverne som værende symbol for frugter i de fem omtalte elevforklaringer, taler for en kobling til "frugtsalat-algebra". Man kunne derfor få mistanke om, at grunden til elevernes misopfattelse skal findes her, i og med at deres bogstavforståelse er relateret til fundamentet for "frugtsalat-algebra". De fem korrekte forklaringer skal naturligvis ikke overses, da disse fem elever højst sandsynligt også har arbejdet med "frugtsalat-algebra", men hvor denne bogstavopfattelse ikke sat sig som en misopfattelse. Dog finder jeg det særdeles opsigtsvækkende, at man hos niendeklasses elever, kort før de forlader folkeskolen, kan finde misopfattelser, som kan være grundlagt i den klassiske reduktionslære, som herefter ikke er blevet korrigeret i forhold til det almene algebraiske arbejde. Jeg finder det derfor nærliggende at undersøge "frugtsalat-algebra" nærmere og således undersøge den tilgang, som Format anvender. Format er både et anerkendt og populært bogsystem og jeg vil derfor mene, at der fra forfatternes side må findes faglige begrundelser for valget af den benyttede tilgang. Jeg vil i det følgende forholde mig undersøgende overfor "frugtsalat-algebra" og herunder undersøge de kvaliteter og faldgruber, i forhold til elevernes bogstavforståelse, som det besidder.

10.1. Bogstaver som mentale billeder - kvaliteter og faldgruber

Jeg kontaktede Formats forlagsredaktør, Mette Christine Bilde, under Skolemessen i Roskilde Hallerne, torsdag d. 7. marts 2013 for at forhøre mig omkring den faglige begrundelse for anvendelsen af "frugtsalat-algebra". Det viste sig, at jeg langtfra var den første, som satte spørgsmålstegn ved det fagligt forsvarlige i bogsystemets tilgang til reduktion. Hun var tidligere blevet kontaktet af andre matematiklærere, der var bekymrede for, at bogens tilgang kunne medvirke til misopfattelser hos eleverne. Hun begrundede forfatternes valg med, at de ønskede at

anvende en visuel tilgang til emnet og formålet var ”*at skabe visuelle billeder for reduktion hos eleverne.”* Dette blev yderligere begrundet i det læringspotentiale, som findes i dannelsen af mentale billeder. I forhold til bekymringen omkring de mulige misopfattelse denne tilgang kunne medføre, var begge forfattere af den overbevisning, at ”*det i så fald ville løse sig senere*”.

Vægtningen af mentale billeder i læringsprocessen støttes af Michael Wahl Andersen og Peter Weng. De mener, at dannelsen af mentale billeder er grundlaget for den faglige tænkning (Wahl Andersen & Weng 2010, s. 97) og at der findes meget læring i at lade eleverne arbejde med forskellige repræsentationer. Ikke mindst fordi det er gennem de forskellige repræsentationer, at eleverne danner mentale billeder, som er hele kernen i matematik, idet ”*mentale billeder er en forudsætning for at tænke matematisk.*” (ibid., s.109).

Küchemann påpeger den kvalitet, som kan ligge i at udfordre elevers allerede etablerede viden. Herved støtter han op om forfatternes overbevisning om, at eventuelle misopfattelser i forbindelse med ”frugtsalat-algebra” ikke vil skabe længerevarende vanskeligheder for eleverne. Han beskriver, hvordan en bogstavforståelse af bogstaver som symbol for objekter konflikter med opfattelsen af bogstaver som repræsentanter for antallet af et objekt, altså et tal. Denne konflikt mener han, vil være medvirkende til, at elever bliver nødsaget til at rekonstruere deres viden og således vil styrke deres matematiske forståelse (1981, s. 119). Der kan altså ligge et godt læringspotentiale i at lade eleverne arbejde med ”frugtsalat-algebra” og senere præsentere bogstaverne som repræsentanter for tal.

Denne overbevisning modsiges dog af konstruktivisterne, hvis syn på læring, som et individuelt anliggende, er en del af det socialkonstruktivistiske læringssyn. Her bliver tidlige misopfattelser mistænkt for at forplante sig til andre og nye begreber (Palm 2008, s. 39). Dvs. en bogstavforståelse for bogstaver som symboler for objekter kan være vanskelig at ændre, når bogstaver eksempelvis optræder som ukendte tal i ligninger. Dette vil vanskeliggøre elevernes forståelse for ligningsløsning og samtidig fastholde dem i Küchemanns kategori 1.

David Pimm er også kritisk overfor brugen af ”frugtsalat-algebra” (1987, s. 132). Han mener, at denne tilgang kan skabe forvirring omkring bogstavets betydning, i det eleverne vil have svært ved at skelne mellem bogstavet som symbol for en frugt og bogstavet som antallet af frugter. Han pointerer: ”*The algebraic expression 5a is not an analogue of five apples, nor is five apples a possible interpretation of 5a……the letters themselves are standing for numbers*” (ibid., s. 132). Det er vigtigt, at eleverne kan skelne mellem brug af bogstaver for objekter eller som enheder, som eksempelvis *m* for meter, og bogstaver som repræsentanter for tal og dette skel vanskeliggøres, hvis betydningen blandes sammen.

MacGregor & Stacey konkluderede i deres undersøgelse, at misvisende undervisningsmateriale lå til grund for elevernes misforståede bogstavopfattelser (1997, s. 15). De fandt belæg for at bogstavforståelser for bogstaver som forkortelse af ord og eller som symboler for objekter, kunne skyldes undervisningsmaterialer og undervisningstilgange, som gjorde brug af selv samme repræsentationsformer (ibid., s. 14). Skønt denne repræsentation kan have sin fordel i et givent emne, som eksempelvis kunne være reduktion, bør denne fordel ikke overskygge den mulige vanskelighed som efterfølgende kan følge eleverne. De påpeger, at "*..the use of misleading teaching materials in early lessons, intended to make initial algebraic learning easy, can seriously disadvantage students.*"(ibid., s. 17).

10.2. Gem frugten til frikvarteret

Jeg har i ovenstående afsnit forsøgt at belyse argumenter og finde belæg for kvaliteter og læringspotentiale, som "frugtsalat-algebra" kan besidde. Samtidig forfulgte jeg min egen mistanke om ulemper og årsager til misforståelser, der kan tænkes forbundet med dette emneområde. Fordelene ved "frugtsalat-algebra" er en konkret fremgangsmåde til reduktionslæren, som samtidig kan styrke elevernes læring ved mental billeddannelse og ydermere en mulig medvirken til en mental konflikt, der jf. Küchemann kan fordre en bedre faglig forståelse. Ulempen ligger i, at "frugtsalat-algebra" bruger bogstaver i en algebraisk forkert betydning, der kan skabe store vanskeligheder for eleverne, hvis de ikke lærer at skelne mellem brugen og betydningen af bogstaver som hhv. tal og som symboler for objekter. Netop denne misopfattelse er særlig udbredt jf. MacGregor & Stacey samt Bergsten. Når bogstaver indgår i den algebraiske cyklus, repræsenterer de et tal og er aldrig et symbol for et objekt. En usikkerhed overfor dette vil gøre elevernes arbejde med den algebraiske cyklus yderst vanskelig og hindre dem i at foretage korrekte conversions og treatments i forhold til cyklussens tre faser. Der kan selvfølgelig tales for, at denne tilgang blot kræver et særligt fokus fra lærerens side i den senere forløb. Men med kendskab til omfanget af elevers algebraiske vanskeligheder, er det så en risiko, der er værd at tage?

På baggrund af mit undersøgende arbejde anser jeg den klassiske reduktionslære, som årsagen til, at bogstavopfattelser tilhørende Küchemanns kategori 1, er et stort og omfangsrigt problem i nutidens matematikundervisning. Årsagen, mener jeg, ligger i den klassiske reduktionslæres anvendelse af "frugtsalat-algebra" og brugen af bogstaver som symboler for objekter. Denne antagelse, bygger jeg på baggrund af tidligere fremførte teoretiske begrundelser samt egne empirisk dokumenteret undervisningserfaringer, der ser problemstillingen fra flere sider. Jeg mener, at appelsiner og bananer skal gemmes til frikvarteret og at matematikundervisningen skal stile mod at give eleverne den

bedste læring, som i min optik er en sand læring. Ikke en læring vi senere ”trækker” tilbage, fordi det blot var ment som en hjælp i en given kontekst og ellers faktisk er direkte forkert. Dette virker som et dobbeltarbejde for underviseren og vil næppe øge elevernes fortrolighed med det matematiske arbejde. Samtidig vil jeg som matematiklærer også mene, at det er muligt at arbejde konkret med reduktion og opnå fordelene ved ”frugtsalat-algebra” uden brug af misvisende bogstavrepræsentationer. For hvis eleverne skal behandle matematikken med respekt, må respekten i første omgang komme fra underviseren selv.

11. Konklusion

Igennem mit arbejde med opgaven har jeg forsøgt at være undersøgende overfor elevers repræsentationskompetence. Jeg har arbejdet med forskellige teoretikere og deres teorier, der kunne komplementere hinanden i forhold til at belyse væsentlige og betydningsfulde aspekter ved problemstillingen. Dette blev sammenholdt med mit undervisningsforløb ud fra både et socialt og et individuelt, psykologisk perspektiv. Grundet den fundne sammenhæng mellem repræsentationskompetencen og Duvals registerteori har det været muligt at undersøge de konkrete matematiske processer, der er af betydning for elevers algebraiske arbejde. Dette indebar et fokus på faserne i Bergstens algebraiske cyklus og herunder elevers bogstavforståelse, som således viste sig at have betydning for repræsentationskompetencen. At sætte særligt ind overfor elevers bogstavforståelse, hvilket var udgangspunktet for mit undervisningsforløb, er derfor et velbegrundet didaktisk tiltag, da en korrekt bogstavforståelse kan mindske omfanget af elevernes algebraiske vanskeligheder.

Jeg forfulgte ligeledes min mistanke om forholdet mellem algebraiske bogstavvanskeligheder og ”frugtsalat-algebra”. En mistanke som var opstået ud fra mine praktikerfaringer under hele min læreruddannelse. Under det undersøgende arbejde forsøgte jeg at belyse fordele og ulemper ved at bruge denne tilgang til reduktion. Skønt jeg personligt, forholdt mig forholdsvis kritisk til emnet inden processen, blev jeg overrasket over de kvaliteter jeg fandt frem til emnet besad. Dog mener jeg, at ulemperne vejer langt tungere ikke mindst på grund af den fundne relation mellem en korrekt bogstavforståelse og repræsentationskompetencen. Samtidig er det mig, som matematiker og lærer, imod at undervise på et forkert grundlag. Jeg ser det derfor ikke kun som et mål, men også som en motivation for mit kommende lærerarbejde, at arbejde for at få den klassiske reduktionslære ud af matematikundervisningen. Denne indsigt, mener jeg, har øget mine kompetencer som matematiklærer.

Litteraturliste

Anesen, L. & Winther, N (2010): Reduktion. *Format 5 Elevbog*. Alinea, s. 42-43

Bergsten, C. m.fl. (1997A): Algebra i 1-12-perspektiv. *Nämnaren tema: Algebra för alla*, s. 9-32.

Bergsten, C. m.fl. (1997B): Att bli bekant med det obekanta. *Nämnaren tema: Algebra för alla*, s. 9-32.

Cobb, Paul & Yackel, Erna (1996A): Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol 27, No. 4, s. 458-477.

Cobb, Paul & Yackel, Erna (1996B): Constructivist, emergent, and socioculturel perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist* 31, s. 175-190

Duval, Raymond (2006): A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 61, s. 103-131.

Imsen, Gunn (2008): *Elevens verden Indføring i pædagogisk psykologi*. Gyldendals Lærerbibliotek.

Karusch, William (1984): *Matematisk opslagsbog*. Politikens Forlag.

Küchemann, Dietmar (1981): "Algebra" in *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*. John Murray.

MacGregor, Mollie & Stacey, Kaye (1997): Student's understanding of Algebraic Notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 33, No 1, s. 1-19.

Niss, Mogens & Jensen, Thomas Højgaard (2002): *Kompetencer og matematiklæring*. Roskilde Universitetscenter.

Palm, Anders (2002): Missuppfattninger i algebra problem för läraren eller eleven? *Nämnaren*, nr. 3, s. 38-42.

Pimm, David (1987): Pupils' written mathematical records. *Speaking Mathematically Communications in Mathematics Classrooms*. Routledge & Kegan Paul, London and New York, s. 111-137.

Skott, J., Jess, K. & Hansen, H.C. (2008A): *Matematik for lærerstuderende Delta Fagdidaktik*. Forlaget Samfundslitteratur.

Skott, J., Jess, K. & Hansen, H.C. (2008B): Tidlig algebra. *Matematik for lærerstuderende Epsilon*. Forlaget Samfundslitteratur, s. 197-217.

Undervisningsministeriet (2009): *Fælles mål 2009 Matematik faghæfte 12*.

Van Amerom, B. A. (2003): Focusing on Informal Strategies when Linking Arithmetic to Early Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 54, No 1, Realistic Mathematics Education, s. 63-75.

Wahl Andersen, M. & Weng, P. (2010): Matematikdidaktiske refleksioner. *Matematik I læreruddannelsen*. Dafolo, s. 88-112.

Bilag

Bilag 1 - Undervisningsplan for ligningsforløb til 5.klasse

Modul	Indhold	Arbejdsmåde	Læringsmål
1	Besvarelse af spørgeskema. Bogstaver i matematik. Egne arbejdsark (Bogstaver er tal vi ikke kender) med tændstikker og tændstikæsker.	Individuel besvarelse. Lærerintro. Gruppearbejde med udleverede arbejdsark.	Eleverne skal vide, at bogstaver indgår i matematiske udtryk som repræsentationer for tal og vide hvorfor de bruges.
2	Intro til regnehistorier med ligninger. Kolorit s. 89. Finde løsninger til ligninger og opstille egne. Kolorit s. 90	Klassedialog. Individuelt arbejde.	Eleverne skal kunne forklare begreberne regnehistorie og ligning. Eleverne skal kunne løse simple ligninger, samt oversætte et ”virkelighedsproblem” til et matematisk udtryk.
3	Intro om ”virkelighedsproblem” der kræver hjælp fra matematikken. Kolorit s.91 Resterende opgaver kolorit s. 90	Kort lærerintro. Gruppearbejde. Individuelt arbejde.	Eleverne skal kunne løse simple ligninger, samt oversætte et ”virkelighedsproblem” til et matematisk udtryk.
4	Funktioner og ligninger. Kolorit s. 92. Kolorit s. 93	Klassedialog. Individuelt arbejde.	Eleverne skal vide, hvordan en given sammenhæng kan forklares ud fra en graf og omvendt.
5	Funktioner til beskrivelse af sammenhænge. Kolorit s. 94+95 Afsluttende opsamling. Besvarelse af spørgeskema.	Kort lærerintro. Gruppearbejde. Klassedialog. Individuel besvarelse.	Eleverne skal kunne forklare en given sammenhæng ud fra en graf og omvendt.

Bilag 2 - Casebeskrivelser fra modul 1.

Grundlaget for beskrivelsen bygger på observationer foretaget i studiegruppen og nedskrevet af undertegnede. Elevnavnene er anonymiseret.

Del 1:

På kateteret ligger to indpakkede tændstikæsker, en bunke med tre løse tændstikker og en bunke med to løse tændstikker.

1. SK: Okay, nu får I en opgave. Jeg vil gerne skrive et udtryk op for antallet af tændstikker, som ligger her på bordet. Der ligger nogle her [peger på bunken med de tre løse tændstikker] og nogle her [peger på den anden bunke] og så er der to æsker. [Hun løfter en af æskerne op og ryster dem, så man kan høre, at der er tændstikker deri] Jeg ved ikke, hvor mange tændstikker der er heri og jeg må ikke pakke dem op for at tælle, men jeg ved dog, at der er lige mange tændstikker i hver æske. Hvad kan man sige om antallet af tændstikker på bordet, hvis jeg skal fortælle, hvor mange der er? Willy.
2. Willy: Der er 5 plus dem i æskerne.
3. SK: Okay, så hvordan kan jeg skrive det op her på tavlen?
4. Willy: Så kan du skrive de 3 plus de 2 plus dem som er i æskerne. [SK skriver ”3+2” op og stopper.]
5. SK: Og hvad skal jeg så skrive for dem i æskerne?”
6. Willy: Hmm, jo altså, vi ved jo ikke, hvor mange der er i dem. Så det kan vi ikke skrive op sådan direkte.
7. SK: Nej, hvad kan vi så gøre, når vi nu gerne vil skrive et udtryk for det *samlede* antal tændstikker på bordet? Jakob.
8. Jakob: Kan du ikke bare skrive det, altså at der udover de 5 også er nogle i æskerne.
9. SK: Okay, så hvis jeg så tilføjer [skriver det følgende op på tavlen, mens hun taler] plus parentes antal tændstikker i den ene æske parentesslut plus parentes antal tændstikker i den anden æske parentesslut, har jeg så fået dem alle sammen med? [Flere elever nikker og enkle tilføjer ”ja”]
   Det var et lidt langt udtryk var? Nogen ide til, hvordan vi kan gøre det lidt nemmere og ikke mindst kortere, så vi slipper for at skulle skrive så meget? Emily.
10. Emily: Vi kunne kalde dem for noget andet.
11. SK: Hvad kunne vi kalde for noget andet?
12. Emily: Jo, altså i stedet for at skulle skrive al det der, så kunne man f. eks kalde det for a?
13. SK: Hvad ville a så stå for?
14. Emily: Det er antallet af tændstikker i æsken.
15. SK: Okay, så hvor skal jeg skrive a?
16. Emily: Så kan du skrive $5+a+a$.
17. SK: Ja, så lægger vi de løse sammen og får 5, men hvorfor kan jeg skrive a for begge æsker? Carl.
18. Carl: det er fordi, at der er lige mange tændstikker i hver æske, så hvis der er a i den ene er der også a i den anden? Men kunne man egentlig ikke også have brugt x?

19. SK: Jo, det kunne man sagtens. Det er egentlig lidt lige meget hvilket tal man bruger, bare man er enig om, hvad bogstavet står for? Og hvad var det, det står for her? Line.
20. Line: Antallet af tændstikker i æsken.
21. Ditte: $a + a$, er det ikke det samme som 2 gange a.
22. SK: Jo, det er helt rigtig, for 2 gange a er det samme som a plus a. Man skriver det som $2 \cdot a$, men mange gange i bøgerne bl.a. så har man sparet gangetegnet væk og så står der bare $2a$, men der gemmer sig faktisk et usynligt gangetegn her imellem. Så hvad er vi endt med. Hvordan kan vi skrive et udtryk for antallet af tændstikker på bordet? Lasse.
23. Lasse: $5+2a$
24. SK: Er i andre enige? [Størstedelen af eleverne tilføjer "ja"]. Godt, det er jeg nemlig os [smiler].

Del 2:

Efter gruppearbejdet med opgaveark 1 blev elevernes besvarelser gennemgået på klassen. Herunder er medtaget udvalgte dele af denne klassedialog:

1. SK: Mette, hvad har du og Ditte svaret til opgave 1.d?
2. Mette: $3x + 3$
3. SK: Ja, og hvad står x'et for?
4. Mette: Antal tændstikker i en æske.
5. SK: Nemlig, tak. Og Fredrik, hvad har du og Carl svaret til opgave 1.e?
6. Frederik: $2c+6$.
7. SK: Ja, og hvorfor har I skrevet $2c$?
8. Frederik: Fordi der er tegnet to æsker og c'et står for antallet af tændstikker i hver æske.
9. SK: Yes, tak skal I ha'.

Del 3:

Udvalgt dialogsekvens fra klasseopsamlingen på gruppearbejde med ark 2.

1. SK: Frans, hvad skulle x være i opgave 1 for at jeres ligning blev sand?
2. Frans: 5
3. SK: Ja og Willy, hvad skulle x være i jeres ligning for at den blev sand?
4. Willy: 9
5. SK: Ja. Lise, hvad kom jeres ligning til at hedde i opgave 2?
6. Linda: $8-a=2$
7. SK: Så hvad skal a være for at denne bliver sand?
8. Linda: 6
9. SK: Ja, og hvad skulle a være hos jer Niklas?
10. Niklas: Der skulle a være 14.

Bilag 3 - Opgaveark 1 fra modul 1.

ARK 1

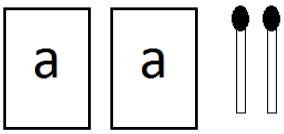
Bogstaver er tal vi ikke kender

Når vi bruger bogstaver i matematik er det fordi vi ikke ved, hvilket tal der er tale om.

Her ved vi ikke, hvor mange tændstikker der er inde i tændstikæskerne. Vi ved kun, at der er samme antal tændstikker i hver tændstikæske. Derfor vælger vi et bogstav, som står for antallet af tændstikker i en æske. Herefter kan vi skrive et udtryk for det samlede antal tændstikker.

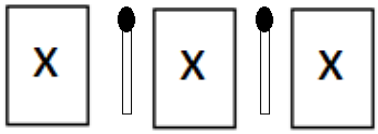
Hvor mange tændstikker er der i alt?

Eksempel 1:



Her har vi:
a + **a** + **1** +**1** tændstikker
Da **a** + **a** = **2**·**a**, som vi ofte bare skriver som **2a**, kan vi skrive dette mere enkelt som: **2a** + **2**

Eksempel 2:



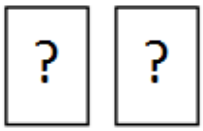
Her har vi:
x + **1** + **x** + **1** + **x** tændstikker
Igen kan dette skrives mere enkelt som:
3x + **2**

Opg. 1. Læg æsker og tændstikker, som vist på tegningen.
Vælg et bogstav, der står for det ukendte antal tændstikker i en æske.

Skriv det her: _____

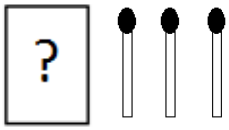
Skriv et matematisk udtryk for det samlede antal tændstikker i hver opgave.
Gør det så enkelt som muligt:

a)



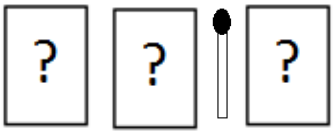
_____

b)



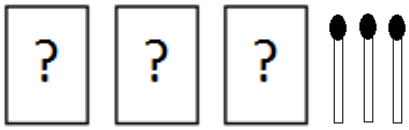
_____

c)



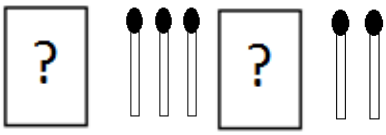
_____

d)



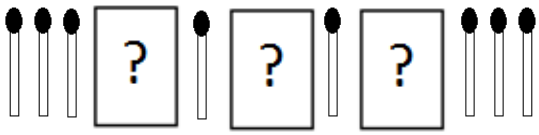
_____

e)



_____

f)



_____

Opg. 2. Prøv selv at lave nogle opstillinger, som vist på tegningerne her over, til hinanden.
Tegn og skriv dem op i jeres kladdehæfter.

Bilag 4 - Opgaveark 2 fra modul 1.

ARK 2

Hvad skal den ukendte være?

I skal nu prøve at opskrive nogle ligninger, hvor I skal finde frem til, hvilket tal bogstavet skal stå for, for at ligningen bliver sand. I skal arbejde sammen to og to.

- Først aftaler I, hvem der har den højre hhv. den venstre kasse.
- Tag samtidig et antal tændstikker i hånden uden at jeres makker ser det.
- Noter antallet i jeres boks.
  (I skal også skrive jeres makkers tal ind i den anden boks)
- Find ud af om det er plus eller minus, der skal bruges og streg det andet ud.
- Find det tal bogstavet skal være, for at ligningen bliver sand.

1. ☐ + / - x = ☐

Hvad skal x være, for at ligningen bliver sand: x = _____

2. ☐ + / - a = ☐

Hvad skal a være, for at ligningen bliver sand: a = _____

3. ☐ + / - b = ☐

Hvad skal b være, for at ligningen bliver sand: b = _____

4. ☐ + / - c = ☐

Hvad skal c være, for at ligningen bliver sand: c = _____

5. ☐ + / - h = ☐

Hvad skal h være, for at ligningen bliver sand: h = _____

6. ☐ + / - l = ☐

Hvad skal l være, for at ligningen bliver sand: l = _____

Bilag 5 - Casebeskrivelse fra modul 2.

Grundlaget for beskrivelsen bygger på observationer foretaget i studiegruppen og nedskrevet af undertegnede. Elevnavnene er anonymiseret.

Klassen har arbejdet to og to med at løse forskellige problemstillinger. Første problemstilling er at finde Lottes vægt, når de ved, at Lise vejer 38 kg og Lotte og Lise til sammen vejer 80 kg.

1. SK: Okay, nu kunne jeg rigtig godt tænke mig at høre hvad I har fundet frem til at Lotte vejer og hvordan I tænkte? [Ca. 2/3 af eleverne rækker hånden op].
2. SK: Ja, Linda, hvad gjorde du?
3. Linda: Jo, altså halvdelen af 80 er 40, så derfor må den anden være 42 fordi der så er to ekstra.
4. SK: Ja, det er rigtigt. Andre der har gjort det på en anden måde?
5. Jakob: Jeg plussede, altså 2+38 er 40 og så plussede jeg op til 80 som var 40 og så passede det med 42.
6. SK: Så, hvad er de 42 du har fundet frem til?
7. Jakob: Hvor meget Lotte vejer.
8. SK: Nemlig. Mette?
9. Mette: Kan man ikke sige 80-38?
10. SK: Hvordan tænkte du Mette?
11. Mette: Jo, altså de vejer 80 til sammen, så hvis jeg trækker Lises vægt fra, som er de 38, så må jeg have Lottes vægt tilbage.
12. SK. Helt rigtig, sådan kan man også gøre det. Hvordan kunne man skrive det som en ligning?
13. Sara: Hvad mener du?
14. SK: Da vi sidste gang havde matematik, der arbejder vi med tændstikkerne, Kan I huske det? [Der nikkes] Hvad var problemet med de indpakkede tændstikæsker?
15. Janus: Vi vidste ikke hvor mange tændstikker, der var inden i dem.
16. SK: Så, hvad var det vi gjorde i stedet? Anna.
17. Anna: Vi skrev et bogstav.
18. SK: Og hvad var det bogstavet stod for?
19. Ole: Tændstikkerne….hvor mange der var af dem.
20. SK: Det var nemlig det vi gjorde. Vi brugte et bogstav for det tal vi ik' kendte, Hvad er det vi ikke kender her?
21. Emily: Lottes vægt.
22. SK: Ja, så hvordan kunne vi skrive det op? Sådan som et regnestykke.
23. Mads: $38+x=80$
24. SK: Ja og hvad står x så for?
25. Mads: Lottes vægt.
26. SK: Ja, i kilo. Passer ligningen, hvis x, altså Lottes vægt er 42?
27. Ditte: Ja, for 38+42 er 80.

Bilag 6 - Elevbesvarelser af spørgeskema omkring deres bogstavforståelse.

Skemaet blev udfyldt af 19 elever inden forløbets begyndelse i modul 1 samt igen efter forløbet i modul 5. Der var ingen svarmuligheder til de enkelte spørgsmål, så for at kunne foretage en sammenligning af deres svar, har jeg grupperet dem i forhold til om deres besvarelse tilhørte en bogstavforståelse tilhørende Küchemanns kategori 1 (kat. 1) eller hans kategori 2 (kat. 2).

Besvarelser fra modul 1:

Spørgsmål 1.

Hvad betyder bogstavet x, når det står i en ligning som denne: $4 + 2 \cdot x = 10$

Kat. 1 - **10**

Heraf blev svaret: ”x = 3” skrevet af **3**

og svaret: ”x er et ukendt tal/et tal vi ikke kender”: blev skrevet af **6**

Kat. 2 - **9**

Udvalgte elevbesvarelser:

Fra kat. 2: Ole: *”4 + 2·x = 10”*

Ditte: ”x er bare et tilfældigt tal.”

Jakob: ”Et tal som du skal gætte.”

Spørgsmål 2.

Prøv at forklare, hvorfor man bruger bogstaver i matematik og hvad de betyder?

Kat. 1 - **13**

Kat. 2 - **6**

Udvalgte elevbesvarelser:

Fra kat. 1: Linda: ”*Når man skal læse hvordan man gør.”*

Eva: ”*Jeg har ikke brugt bogstaver, så det kan jeg ikke svare på.”*

Mette: ”*Kode, så man kan skrive en besked.”*

Fra kat. 2: Emily: ”*Bogstavet står i stedet for et tal.”*

Cille: ”*fx x, som står for et tal vi ikke kender.”*

Besvarelser fra modul 5:

Spørgsmål 1.

Hvad betyder bogstavet x, når det står i en ligning som denne: $4 + 2 \cdot x = 10$

Kat. 1 - **0**

Kat. 2 - **19**

Denne besvarelse kan opdeles i to:

Svaret: ”x = 3” - blev skrevet af **8**

Svaret: ”x er et ukendt tal/et tal vi ikke kender”: blev besvaret af **11**

Spørgsmål 2.

Prøv at forklare, hvorfor man bruger bogstaver i matematik og hvad de betyder?

Kat. 1 - **5**

Kat. 2 - **14**

Udvalgte elevbesvarelser:

Fra kat. 1: Mads: *”Man bruger bogstaver, når der er noget man ikke ved hvad er.”*

Sara: *”Det står for noget man ikke ved.”*

Janus: ”*Man kan bruge A-Å som står for det ukendte.”*

Fra kat. 2: Linda: ”*Så har man et navn for det tal man ikke ved.”*

Niklas: *”Når der er et tal man ikke ved hvad er, så bruger man et bogstav.”*

Anna: *”Bogstaverne står for noget man ikke ved antallet af.”*

Bilag 7 - Niendeklasses elevers besvarelse af et spørgsmål omkring deres bogstavforståelse

Spørgeskemaet blev udfyldt af 26 elever to uger inde i et forløb omkring ligninger. Der var ingen svarmuligheder til spørgsmålet, men for at kunne foretage en sammenligning af deres svar, har jeg grupperet dem i forskellige kategorier.

Forklar eller beskriv udtrykket: 3a + 2b. Brug evt. en "regnehistorie":

17 besvarede opgaven. Disse besvarelser kan opdeles i 3 grupper:

1. Svar, der vidner om en korrekt forståelse: 7, heraf var 3 besvarelser helt ordrette identiske og fra tre elever ved samme bordgrupper, så de vælges at ses som en og der anses derfor at være **5** elever i denne gruppe.
2. Svar, der vidner om en misopfattelse: **5**
3. Svar, der er mangelfuldt og ikke vidner om hverken korrekt eller forkert forståelse: **5**

<u>*Udvalgte besvarelser til gruppe 1:*</u>

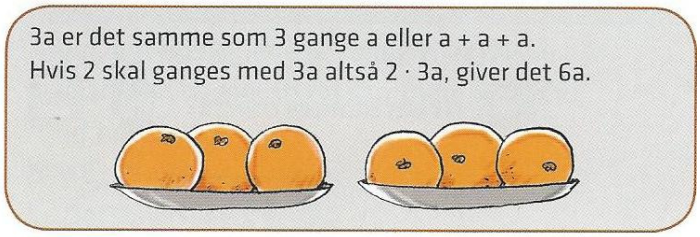
- *"a og b kunne stå for mønter, så 3a = 3 2 kroner og 2b = 2 1 kroner."*
- *"…hver sandwich koster 3 kroner og hvert glas saft koster 2 kroner, antallet af sandwich er a og antallet af saft er b."*
- *"Jens skal ringe, det koster 3 kr. pr. min og opkaldsprisen er 2 kr."*

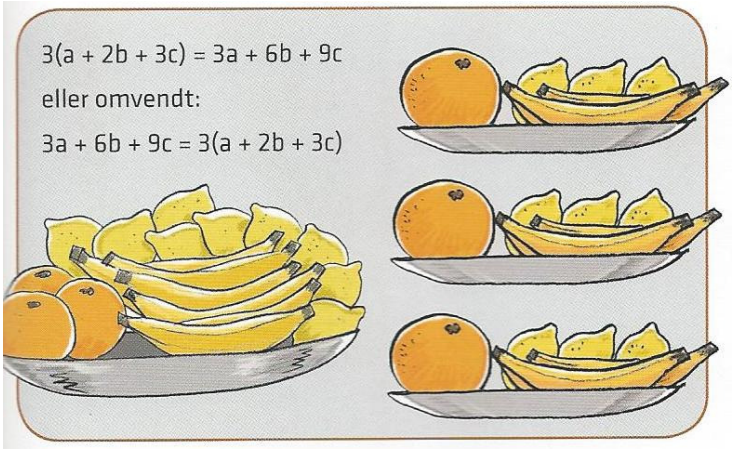
<u>*Udvalgte besvarelser til gruppe 2:*</u>

- *"3 æbler og 2 bananer"*
- *"a kunne være æbler og b kunne være bananer og når man så regner dem sammen får man 5 frugter."*
- *"3 æbler + 2 bananer = 5 frugter"*
- *"fx i en frugtskål, hvor a = appelsiner og b = bananer"*

Bilag 8 - Opgave og eksempler fra Formats elevbog

Nedenstående eksempler samt opgave er fra Format 5 Elevbog:





Kilde: Anesen & Winther 2010, s.42+43