Københavns Professionshøjskole

UDVIKLING AF ELEVERS RÆSONNEMENTS-KOMPETENCE GENNEM UNDERSØGENDE MATEMATIK-UNDERVISNING

Katrine Darling Kristiansen
Carolina Andrea Varnild Aagreen

Anslag: 88.825

Indholdsfortegnelse

Indledning

I folkeskolen er man som lærer ikke pålagt at skulle benytte de læremidler, som skolen stiller til rådighed, men mange matematiklærere bruger læremidlerne, når de planlægger de enkelte undervisningstimer (Rasmussen et al., 2019). I KOM-rapporten afdækkes, at det ikke er nok at fokusere på det faglige stof, men at de 8 matematiske kompetencer bør være en central del af undervisningen (Niss & Jensen, 2002). Når læremidlet ligger til grund for den undervisning, som mange praktiserer, er det læremidlet, der bliver afgørende for, om eleverne arbejder med kompetencerne eller ej. På baggrund af følgende citat vil vi i denne opgave have et særligt fokus på, hvordan man kan udvikle elevers ræsonnementskompetence: "At lære at ræsonnere i matematik anses som en af de vigtigste kompetencer i matematikundervisningen, men ikke desto mindre anses det ikke som en let opgave at udvikle elevernes ræsonnementskompetence..." (Larsen, 2019, s. 18).

En måde at arbejde med ræsonnementer, er gennem undersøgende undervisning: "... en central del af den undersøgende matematik [er] potentialet for elevernes ræsonnerende virksomhed" (Larsen & Lindhardt, 2019, s. 8). Det er dog ikke nok at give eleverne en, på papiret, undersøgende aktivitet. Det er både afgørende, hvordan opgaverne er designet i forhold til, hvilke læreprocesser eleverne skal igennem og hvilke materialer, der gøres brug af, men også hvordan man bruger og stilladserer aktiviteten. Hvis eleverne skal arbejde undersøgende, kræver det, at de får mulighed for at "... formulere faglige spørgsmål, fastlægge manglende oplysninger, vende tingene på hovedet, eksperimentere, strukturere, visualisere, ja i det hele taget være matematiknysgerrige og matematikkreative" (Pind, 2015, s. 7). I Folkeskolens Formålsparagraf står der, at folkeskolen skal give elever lyst til at lære mere, og man må derfor lade eleverne være nysgerrige og stille spørgsmål, da det kan være medvirkende til at bevare arbejdsindsatsen, selv når noget bliver svært (Pind, 2015).

Sigtet med en undersøgende matematikundervisning, er udviklingen af elevers relationelle forståelse (Hansen & Hansen, 2013). En relationel forståelse og evnen til at ræsonnere er tæt forbundne, idet de begge forudsætter, at eleven kan skabe sammenhæng mellem forskellige matematiske koncepter, begreber og procedurer. Vores forventninger er at læremidler ofte indeholder opgaver med lave kognitive krav og dermed har fokus på færdigheder og en instrumentel forståelse af matematik. Vi ønsker derfor at undersøge om dette gør sig gældende i Kolorit 8, og hvordan man som lærer kan højne de kognitive krav, så eleverne får mulighed for at arbejde med deres ræsonnementer. I forlængelse heraf ønsker vi at besvare følgende problemformulering:

Hvordan kan man som matematiklærer stilladsere undervisning med et særligt fokus på udvikling af elevers ræsonnementskompetence?

For at besvare vores problemformulering, vil vi undersøge, hvilke potentialer en undersøgende tilgang til matematikundervisningen har på udviklingen af elevernes relationelle forståelse og ræsonnementskompetence. Hertil vil vi forsøge at afdække, hvilke kognitive krav der stilles til eleven i mødet med lærebogen Kolorit 8, og hvordan læreren gennem stilladsering kan højne de kognitive krav.

Opgaven indledes med en metodebeskrivelse, hvorefter vi redegør for vores læringssyn. I teoriafsnittet vil vi præsentere teori om undersøgende matematikundervisning af Pernille Pind (2015), Dorte Moeskær Larsen (2019), Rune Hansen & Povl Hansen (2013) og KiDM-projektet (Hansen et al., u.å). Dernæst præsenteres fire typer af kognitive krav i matematikopgaver af Stein, Smith, Henningsen og Silver (Skott et al., 2018) og teori om stilladsering af henholdsvis Lev Vygotsky (1982; 2006), Nora Lindén (1997) og stilladseringsfunktioner af Wood, Bruner og Ross (Brodersen & Gissel, 2015; Gissel, 2020). Herefter introduceres Guy Brousseaus didaktiske situationer (Skott et al., 2008) og forskellen på en relationel og en instrumentel forståelse af Richard R. Skemp (2006). I analysen vil vi først præsentere læremidlet Kolorit 8, hvorefter vi analyserer udvalgte opgaver med henblik på i diskussionen at afdække, hvordan opgaver med henholdsvis lave og høje kognitive krav kan stilladseres, så niveauet løftes eller sikres. I forbindelse med dette har vi lavet en optælling af, hvilke niveauer opgaverne i kapitlet 'Geometriske eksperimenter' ligger på, for at skabe et overblik over i hvor høj grad læremidlet tilskynder til at arbejde med elevernes ræsonnementer og relationelle forståelse. Dernæst præsenterer og analyserer vi en case i to dele. Casen er fra et praktikforløb, og vi vil gennem opgaven benævne os selv som 'praktikanten', når det beskrevne omhandler noget fra praksis. Vi bruger derimod benævnelsen 'læreren', når vi henviser til generel teori. I forlængelse af analysen vil vi i diskussionen sammenholde de teoretiske pointer fra analysen og diskutere, hvordan man bedst stilladserer opgaver med fokus på udvikling af elevers ræsonnementskompetence. Afslutningsvis samles vores pointer i en konklusion.

Metode

Vi har i vores opgave valgt at inddrage flere forskellige former for undersøgelsesmetoder, i form af en analyse af et læremiddel og en case. Når man gør brug af en kombination af flere undersøgelsesmetoder, kaldes det for metodetriangulering. Denne fremgangsmåde har til hensigt at give et mere nuanceret billede af virkeligheden (Aagerup & Willaa, 2016). Hvis vi kun havde analyseret et læremiddel, ville vi ikke kunne inddrage, hvordan læremidlet kan anvendes i en folkeskolekasse. Vi har derfor valgt at tage dette perspektiv med, gennem en case fra vores praktik, så vi kan belyse denne tosidethed. Derudover kan en matematikopgave ikke i sig selv stille høje eller lave kognitive krav til eleverne, da lærerens stilladserende rolle i undervisningen er mindst lige så vigtig, i bestemmelsen af opgavens kognitive niveau (Skott et al., 2018).

I vores analyse inddrager vi allerede eksisterende empiri i form af læremidlet Kolorit 8, hvortil vi benytter en deduktiv analysestrategi. Den deduktive undersøgelse tager udgangspunkt i teorier og begreber, for at undersøge, hvad der er på spil i forhold til disse i den valgte empiri (Aagerup & Willaa, 2016). I analysen af et kapitel i Kolorit 8 tager vi udgangspunkt i de fire typer af kognitive krav som Skott et al. (2018) definerer, for efterfølgende at kategorisere opgaverne. På baggrund af vores kvalitative tilgang i analysen laver vi en kvantitativ optælling, for at klarlægge, hvor mange af opgaverne der vurderes at stille henholdsvis høje og lave kognitive krav til eleverne.

Vi benytter den samme fremgangsmåde til at analysere kravene til de kognitive niveauer i alle opgaverne i kapitlet fra Kolorit 8, hvorfor denne metode vurderes at have høj reliabilitet, da andre har mulighed for at efterprøve analysen. Reliabilitet henviser til en undersøgelses pålidelighed, og hvorvidt undersøgelsen ville give samme resultater, hvis den blev gentaget under samme forhold (Aagerup & Willaa, 2016). I vores analyse af opgaverne har vi taget udgangspunkt i, at opgaverne i læremidlet bliver fulgt kronologisk af eleverne gennem hele kapitlet. Analysen af hver enkelt opgave kunne have set anderledes ud, hvis den blev sat ud af kontekst. Dog kan der stilles spørgsmålstegn ved, om optællingen ville blive den samme, hvis den blev udført af andre, fordi analysen af opgavernes kognitive krav er baseret på en vurdering og tolkning af hver opgave. Vores metodebeskrivelse er pålidelig, men det bringer en usikkerhed til reliabiliteten af optællingen af opgavetyperne, at det er vores tolkning af opgaverne, der bestemmer denne. Validitet henviser til en undersøgelses gyldighed. En undersøgelse med høj validitet måler på det, der ønskes undersøgt og har derfor en gyldig tolkning af data (Aagerup & Willaa, 2016). Vores metode har høj validitet, fordi den undersøger, hvilke opgaver der har høje eller lave kognitive krav, nøjagtigt som ønsket.

Vi har, på baggrund af vores observationer i et praktikforløb, udarbejdet en case over en undervisningssituation. Tager man udgangspunkt i observation som metode, er der mange faktorer at tage højde for, når observationen foretages. Når man observerer, kan man være tilbøjelig til at tro at observationerne er det samme som virkeligheden. Observationerne er dog kun et bud på en opfattelse af virkeligheden (Aagerup & Willaa, 2016). Derfor kan vi ikke tillægge vores observationer den fulde sandhedsværdi. Vi har foretaget vores observationer ustruktureret, fordi vi ønskede at være åbne for at opdage noget ukendt og få øje på mulige problemstillinger. Vi har i vores observationer forsøgt at observere det hele. Dog er det et grundlæggende princip inden for perceptionspsykologien, at den menneskelige hjerne bearbejder sanseindtryk, så de giver mening (Aagerup & Willaa, 2016). Vi må derfor i vores metode tage højde for, at en anden observatør i samme situation kunne have fået øje på andre problemstillinger.

Læringssyn

Vores læringssyn lægger sig op ad socialkonstruktivismen. Det socialkonstruktivistiske læringssyn "... betoner den individuelle læring som et socialt situeret fænomen i den forstand, at læring er forbundet med kulturel tilegnelse gennem en efterlignende proces, som involverer samarbejde med andre mennesker, herunder læreren" (Beck et al., 2014 s. 319). Viden konstrueres gennem kommunikation med andre og kan derfor betegnes som noget, der konstrueres i fællesskab ud fra de enkelte lærendes mentale processer (Beck et al., 2014). Paul Cobb er matematikdidaktiker og har udvidet det socialkonstruktivistiske læringssyn til at omhandle matematikfaget specifikt. Han har udviklet en model over matematikklasserummet, som beskriver sammenhængen mellem et socialt og et psykologisk perspektiv i læring (Skott et al., 2018).

Et af de sociale perspektiver handler om de sociomatematiske normer, der henvender sig særligt til matematik og det specielle ved faget. De sociomatematiske normer er henvendt til matematik og det specielle ved faget. Det omhandler for eksempel de elementer, der kendetegner et godt matematisk spørgsmål, svar, forklaring eller løsning. Det psykologiske perspektiv der relaterer sig til de sociomatematiske normer, handler om de forestillinger eleverne har om matematik og matematisk aktivitet, for eksempel hvorvidt eleverne selv skal bidrage med forslag og ideer i undervisningen. De sociomatematiske normer skabes både i samspil mellem lærer og elev, men også eleverne imellem (Skott et al., 2018).

Teori

Undersøgende matematikundervisning

"Åben og undersøgende matematik kræver, at man formulerer spørgsmål og hypoteser, at man ræsonnerer, argumenterer, drager konklusioner og fremlægger, diskuterer, forsvarer og forklarer disse" (Pind, 2015, s. 8). Der findes forskellige definitioner på, hvad der kendetegner undersøgende matematikundervisning. I det følgende vil vi redegøre for begrebet på baggrund af teorier af Pernille Pind, Dorte Moeskær Larsen, Rune Hansen & Povl Hansen og KiDM-projektet.

Pernille Pind (2015) differentierer ikke mellem de to begreber 'åben matematik' og 'undersøgende matematik', men opstiller seks forskellige typer af åbne opgaver: *Svaret er givet, Manglende oplysninger*, *Regnehistorier*, *Undersøgelser*, *Modellering* og *Nye begreber*. Fælles for Pinds typer af opgaver er en høj grad af elevstyring og mange mulige veje til målet (Pind, 2015).

Ph.d.-afhandlingen *Developing reasoning competence in inquiry-based mathematics teaching* af Dorte Moeskær Larsen (2019) søger at finde svar på, om elevers ræsonnementskompetence kan udvikles gennem en undersøgende tilgang til undervisning. At kunne ræsonnere betragtes som en af de vigtigste matematiske kompetencer, men også en af de sværeste kompetencer at undervise i og med (Larsen, 2019). Ræsonnementskompetencen indebærer at kunne følge og bedømme et matematisk ræsonnement. Et matematisk ræsonnement er en kæde af argumenter, som er fremsat af andre, enten på skrift eller i tale. Det handler om at vide og kunne forstå, hvad et matematisk bevis er, og hvornår et matematisk ræsonnement udgør et bevis eller ej. Kompetencen indebærer at kunne bedømme holdbarheden af matematiske påstande, men også at kunne overbevise andre og ikke mindst sig selv om gyldigheden af påstande (Niss & Jensen, 2002). Afhandlingen viser, at undersøgende undervisning kan bidrage til at udvikle elevers ræsonnementskompetence, men samtidig at det er lærerens forberedelse og stilladsering, der er afgørende (Larsen, 2019). Afhandlingen tager udgangspunkt i forsknings- og udviklingsprojektet Kvalitet i Dansk og Matematik (KiDM). Projektet har som fokus at "identificere, udvikle og systematisk afprøve en række indsatser, som udvikler undervisningen i dansk og matematik" (Hansen et al., u.å.). For indsatsen i matematik gælder, at undervisningen skal være undersøgende og dialogisk med en høj grad af elevdeltagelse (Hansen et al., u.å.), og projektet havde blandt andet til hensigt at understøtte elevers udvikling af ræsonnementskompetencen (Larsen, 2019).

I KiDM-projektet arbejder man med tre faser: *Iscenesættelse*, *Aktivitet* og *Opsamling og fællesgørelse*. Iscenesættelsen skal vække elevernes nysgerrighed og give anledning til spørgsmål, som kræver en undersøgende tilgang at besvare. Læreren må derfor i sin planlægning af opgaven overveje, hvordan eleverne kan motiveres, hvor mange informationer eleverne skal have, og hvordan man får aktiveret eleverne gennem dialog om opgaven. I aktivitetsfasen arbejder eleverne selvstændigt med et passende niveau af stilladsering og frihedsgrader. Eleverne skal her forstå vigtigheden af deres deltagelse, hvilket også forudsætter, at opgaven er stilladseret på en måde, som gør den tilgængelig for dem. Samtidig vil denne fase indebære nogle momenter af usikkerhed og fejl, som er nødvendige i en undersøgende proces, og læreren skal derfor i sin stilladsering have fokus på ikke at overtage elevernes proces, når de bliver frustrerede eller går i stå. I stedet må man forsøge at stille spørgsmål, som kan give anledning til yderligere refleksioner hos eleverne. I opsamlingen skal de forskellige resultater eleverne er nået frem til, og refleksioner, de har gjort sig, lede til en fælles faglig forståelse (Hansen et al., u.å.).

Rune Hansen og Povl Hansen (2013) kategoriserer undersøgende aktiviteter i fire forskellige typer: *Bekræftende*, *Strukturerede*, *Guidede* og *Åbne undersøgelser*. De fire typer af aktiviteter kan ses som et kontinuum fra nogle i høj grad lærerstyrede undersøgelser til de meget elevstyrede.

Når mange lærere finder det udfordrende at tilrettelægge undersøgelsesbaseret undervisning, kan det skyldes, at mange opfatter undersøgende og åbne opgaver som synonymer. Hansen & Hansen (2013) argumenterer for, at man med fordel kan starte en undersøgende undervisningspraksis med de mere lærerstyrede aktiviteter, som dermed ikke adskiller sig væsentligt fra den undervisning, man givetvis normalt praktiserer. Samtidig vil en gradvis introduktion til mere åbne opgaver give eleverne erfaringer, som hjælper dem til efterhånden at kunne varetage ansvaret, der følger med de opgaver, som er meget elevstyrede. En pludselig introduktion til åbne opgaver vil desuden være en svær overgang, hvis eleverne ikke tidligere har arbejdet undersøgende (Hansen & Hansen, 2013). Åbne opgaver i matematikundervisningen er opgaver, der har flere mulige løsninger og svar, og hvor der er valg, der skal træffes (Pind, 2015). Åben betyder altså i matematiksammenhænge, at der er noget, som ikke er afgjort endnu. Det er op til eleven at træffe valg, som er med til at lukke opgaven, således at eleven kan komme frem til en fremgangsmåde med et tilhørende svar. Når den uerfarne, undersøgende elev først arbejder med åbne opgaver, vil eleven ikke opleve sig selv som en bevidst beslutningstager, da vejen til en løsning ofte bliver den, for eleven, mest velkendte. Jo mere erfaring eleven får med åbne opgaver, jo mere bevidst bliver han eller hun om, hvilke valgmuligheder der er, og det bliver dermed muligt at vælge alternative løsninger (Pind, 2015).

Kognitive krav i matematik

I de følgende afsnit vil vi afdække, hvad der karakteriserer opgaver med henholdsvis lave og høje kognitive krav. Dette vil vi gøre på baggrund af Stein, Smith, Henningsen og Silver (fra: Skott et. al. 2018, s. 226-231). De kognitive krav kan inddeles i fire niveauer, som bliver vurderet på baggrund af, hvilken type tænkning eleven skal benytte, for at arbejde med og løse en opgave.

Lavniveau - vide at og vide hvordan	1a – Hukommelsesoplæg
	1b – Procedurer uden forbindelser
Højniveau - vide hvorfor	2a – Procedurer med forbindelser
	2b – Oplæg med matematisk tænkning

Figur 1

I mødet med opgaver med lave kognitive krav skal eleven kunne huske resultater og procedurer. Opgaverne handler om at vide at og vide hvordan. Opgaver med lave kognitive krav kan inddeles i to kategorier: 1a, som er hukommelsesoplæg, og 1b, som er oplæg med procedurer uden forbindelser. Ved hukommelsesoplæg er opgaverne karakteriseret ved, at eleven skal arbejde med at reproducere tidligere lærte regler, formler, fakta eller definitioner uden, at der er forbindelse til de begreber eller den mening, der ligger bag det tidligere lærte. Opgaverne kan ikke laves ved hjælp af procedurer, enten fordi der ikke er nogen procedure, eller fordi tiden, der er afsat til opgaven, er for kort til, at eleven ville kunne nå at benytte en. I det andet niveau, oplæg med procedurer uden forbindelser, er opgaverne karakteriseret ved, at eleven skal kunne gennemføre procedurer uden at forbinde dem med ræsonnementer. Det er klart for eleven, hvilken procedure der skal bruges og hvordan. Fokusset ligger i at få det korrekte svar, snarere end at udvikle matematisk forståelse.

I opgaver med høje kognitive krav skal eleven kunne inddrage forskellige former for forståelser. Opgaverne handler om at vide hvorfor. De høje kognitive krav bliver også opdelt i to niveauer: 2a, oplæg med procedurer med forbindelser, og 2b, oplæg med matematisk tænkning. Niveau 2a er karakteriseret ved, at der er brede og generelle veje til løsningerne, som har forbindelser til de underliggende begreber. Der er fokus på, at eleven skal udvikle en bedre forståelse af matematiske begreber, og der er ofte tilknyttet flere forskellige repræsentationer, netop for at understøtte begrebsforståelsen. Eleven vil have mulighed for at følge en procedure, men denne kan ikke følges blindt, hvorfor eleven skal kunne forstå det begrebslige indhold for at klare opgaven. Det sidste niveau, 2b, er karakteriseret ved, at eleven engagerer sig i matematisk tænkning. Her er ingen kendte algoritmer eller procedurer. Opgaverne stiller i stedet krav til, at eleven selv finder relevant viden og erfaringer, som de kan benytte til at løse opgaven. Opgaver på dette niveau kan være usikkerhedsskabende for nogle elever, da der vil være uforudsigelige elementer i opgaven, og fordi det er eleven selv, der skal analysere opgaven og derigennem finde mulige strategier og løsninger.

Stilladsering

Følgende afsnit om stilladsering er skrevet på baggrund af Vygotskys teori om zone for nærmeste udvikling og teori om det støttende stillads af Lindén. Til slut præsenteres tre stilladseringsfunktioner.

"Det, som barnet i dag kan klare med den voksnes hjælp, vil det i morgen kunne gøre selvstændigt" (Vygotsky, 1982, s. 118). Lev Vygotsky (1982) definerer et barns zone for nærmeste udvikling som forskellen mellem to niveauer. Man er nødt til at bestemme de to niveauer i barnets udvikling, for at bestemme det reelle forhold mellem udviklingsprocesserne og mulighederne for undervisning. Det første niveau er barnets aktuelle udviklingsniveau, der defineres af dets intellektuelle formåen og selvstændige handlen. Det andet niveau angiver barnets potentielle udviklingsniveau. Her menes det udviklingsniveau, som med støtte fra en voksen er inden for rækkevidde (Vygotsky, 1982). Zonen for nærmeste udvikling fortæller derfor både noget om de modningsprocesser, barnet allerede har færdiggjort og de modningsprocesser, der er under udvikling (Vygotsky, 2006).

Stilladsering er et bud på en konkretisering af Vygotskys teori om zonen for nærmeste udvikling. Stilladsering handler om at stille de "rigtige" spørgsmål i en konkret situation, så barnet hjælpes på vej, uden at støtten bliver for omfattende og opgaven for let. Et stillads skal kun være tilgængeligt efter barnets behov, og behovet for stilladsering i en undervisningssituation vil derfor være afhængigt af både situationen og den pågældende elev (Lindén, 1997). Stilladset har både en objektiv og en subjektiv funktion. Den objektive funktion består i, at stilladset gøres tilgængeligt for eleven, mens den subjektive funktion består i, at eleven aktiviserer stilladset ved at gøre brug af det, for dermed over tid at gøre det overflødigt (Lindén, 1997). Både for lidt og for meget støtte kan bevirke, at eleven mister interessen og motivationen for en opgave, og det er derfor af afgørende betydning, at første trin i stilladsbygningen består i at observere om, der er et behov for støtte. Det andet trin involverer at forstå, hvad den forestående læringsvirksomhed omhandler, så man kan møde eleven der, hvor han eller hun er og bygge stilladset op omkring denne virksomhed (Lindén, 1997).

Wood, Bruner og Ross har videreudviklet stilladseringsbegrebet og opstillet seks karakteristiske funktioner for stilladseringsprocessen (Fra: Gissel, 2020). *Reducering af frihedsgrader*, *Markering af kritiske træk* og *Frustrationskontrol* er tre af funktionerne, som blandt andet kan bruges til at analysere lærerens rolle i undervisningssituationer (Brodersen & Gissel, 2015).

Didaktiske situationer

De følgende afsnit bygger på Skott et al. (2008) og vil afsøge Guy Brousseaus teori om didaktiske situationer, som kan bruges til at forstå de læringspotentialer, der opstår i et matematikklasserum. Han argumenterer for, at man, udover kognitive perspektiver, må overveje, hvilken betydning materialer og sociale forhold i arbejdet med materialerne, herunder kommunikationen med læreren, har for elevernes læring.

Brousseau beskriver, at man med fordel kan planlægge en undervisning, hvori der er et element af spil. Den afgørende faktor er her, at læreren ikke definerer reglerne for, hvordan man vinder spillet, da læringspotentialet i en aktivitet består i elevernes udvikling af vinderstrategier. For at finde frem til en brugbar strategi, må eleven udvikle den nødvendige matematiske viden, hvorfor den matematiske forståelse bliver en forudsætning for en god strategi.

Brousseau beskriver fem faser i elevernes matematiske arbejde: *Devolution*, *Aktion*, *Formulering*, *Validering* og *Institutionalisering*. Med afsæt i at læring i matematik sker gennem løsning af matematiske problemer, skal læreren overdrage det faglige matematiske problem til eleven i den første fase af undervisningen. Eleven skal acceptere at påtage sig ansvaret for opgaven, og denne overdragelse fra lærer til elev kaldes devolution. Devolutionsfasen betegnes som en didaktisk situation, der er kendetegnet ved, at læreren spiller en central rolle, idet hun er aktiv som underviser. I aktionsfasen arbejder eleverne med vinderstrategier gennem interaktion med det miljø, som læreren har skabt. Denne fase er a-didaktisk, hvilket vil sige, at læreren indtager en tilbagetrukket rolle, og eleverne dermed i højere grad arbejder selvstændigt, uden at være styret af lærerens forklaringer eller forventninger. Læreren har dog stadig en indirekte indflydelse på aktionsfasen gennem didaktiske variable, hvilket indebærer alt det i miljøet som, hvis det blev ændret, ville medføre et andet læringspotentiale. I formuleringsfasen forklarer eleverne aktionsfasens fremgangsmetoder med inddragelse af hypoteser om resultater eller strategier. Denne fase kan være didaktisk eller a-didaktisk, afhængigt af opgaven og elevernes evne til at kommunikere om deres strategier. Valideringsfasen involverer de netop fremsatte hypoteser, som gennem argumenter, eksempler og modeksempler kan bevises eller modbevises. Fasen er didaktisk i kraft af lærerens bærende rolle i debatten om de forskellige hypoteser. Den sidste fase, institutionalisering, indebærer en kobling mellem det læringsudbytte, eleverne har fået gennem de øvrige faser, og anerkendt viden indenfor matematikken. Det er lærerens opgave at tydeliggøre, hvad eleverne har lært, hvorfor denne fase ligeledes er en didaktisk situation. Brousseau mener, at der er brug for både didaktiske og a-didaktiske situationer i en undervisningssituation som incitament for elevernes selvstændige arbejde. De a-didaktiske situationer er en forudsætning for læring, da "... læring kan umuliggøres, hvis eleverne ikke engagerer sig selvstændigt i de oplæg, de skal arbejde med" (Skott et al., 2008, s. 430). Denne erkendelse kan dog besværliggøres af det, Brousseau kalder den didaktiske kontrakt.

Den didaktiske kontrakt omhandler de uudtalte, gensidige forventninger, der opstår i undervisningen mellem eleven og læreren. Det kan være forventninger til form og indhold i undervisningen, men det indebærer også forventninger til eleven som den lærende og læreren som underviser, det vil altså sige den der skal lære eleven det, han skal lære. "De relativt konstante elementer i disse gensidige, indholdsspecifikke forventninger er kernen i den didaktiske kontrakt" (Skott et al., 2008, s. 422). Hvis læreren i et forsøg på at leve op til sit ansvar som underviser kommer til at give eleverne for meget hjælp, kan det have uhensigtsmæssige konsekvenser. Der kan opstå en konflikt i den didaktiske kontrakt, idet læreren i sit ønske om at undervise får hjulpet eleven så meget, at svaret, eleven forventes at fremkomme med, ikke kræver matematisk tænkning. Eleven mister derved muligheden for at lære og opfylde sin del af kontrakten. Denne simplificering af opgaver kalder Brousseau for *Topaze-effekten*, og læring vil i et sådant tilfælde forudsætte, at den didaktiske kontrakt bliver brudt.

Relationel forståelse og instrumentel forståelse

Følgende afsnit er skrevet på baggrund af Skemps (2006) definitioner af de to betydninger af begrebet 'forståelse' i matematikundervisning.

Ordet forståelse kan ifølge Richard R. Skemp (2006) give anledning til udfordringer, når man taler om matematikundervisning. Definitionen, eller forståelsen, af ordet forståelse vil for mange betyde evnen til at se sammenhænge; det Skemp definerer som en relationel forståelse. Han beskriver den relationelle forståelse som ”knowing both what to do and why” (Skemp, 2006, s. 89), hvorved man prioriterer vigtigheden af, hvorfor en formel eller metode fungerer. Andre forstår derimod forståelse som en instrumentel udenadslære af eksempelvis formler, regnemetoder eller regler, som kan bruges til korrekt løsning af matematikopgaver. Denne forståelse kalder Skemp for ”rules without reasons” (Skemp, 2006, s. 89). Han vurderer, at den relationelle forståelse er det, de fleste mennesker forstår ved forståelse, da matematisk forståelse sjældent defineres ved evnen til at huske eller recitere udenad. På trods af dette bliver der i høj grad undervist instrumentelt i matematik, da der både blandt elever og lærere er en udbredt forståelse af den instrumentelle tilgang som den mest anvendelige til bestemmelse af matematisk formåen (Skemp, 2006). En forklaring på dette er den såkaldte backwash-effekt: Fordi eleverne til den skriftlige afgangsprøve bliver vurderet på, hvorvidt de kan svare rigtigt eller ej, bliver netop evnen til at løse matematikopgaver korrekt og hurtigt prioriteret højere i undervisningen end den grundlæggende matematiske forståelse (Skott et al., 2018).

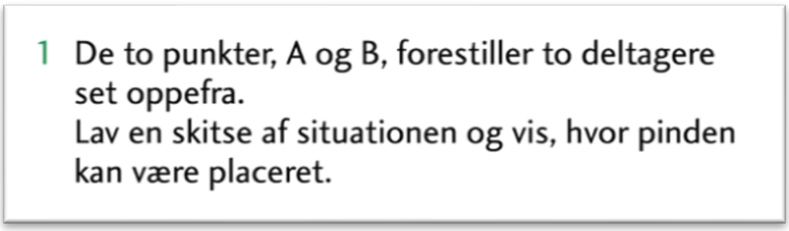
På trods af en umiddelbar modstand mod den instrumentelle forståelse som et reelt middel til matematisk læring, pointerer Skemp (2006) nogle positive og essentielle aspekter ved denne tilgang. Uanset hvor god en relationel forståelse man besidder, har man brug for nogle instrumentelle færdigheder, der hurtigt og effektivt kan give de korrekte svar. Han argumenterer for, at den instrumentelle forståelse giver mere pålidelige svar, da man får serveret en simpel løsning, der ikke kræver meget viden af eleverne. En anden fordel ved den instrumentelle forståelse er, at den på kort sigt er lettere tilgængelig, da det kognitivt kræver mindre at memorere en formel eller regel, som for eksempel at man ‘dividerer to brøker, ved at gange den første med den omvendte af den anden’, fremfor at forstå den bagvedliggende sammenhæng. Dette fører samtidig til en umiddelbar belønning i form af korrekt løste opgaver, hvilket kan give eleverne en følelse af mestring og selvtillid og dermed motivere dem til fortsat læring. På trods af de kortsigtede fordele mener Skemp (2006), at undervisning der tager udgangspunkt i en relationel forståelse bør dominere. Selvom instrumentel undervisning kan være givende på kort sigt og indenfor en begrænset kontekst, er relationel undervisning bedre for elevernes langsigtede læring.

Analyse

Kolorit 8 (Kaas & Kristiansen, 2016) er en grundbog, som indeholder 11 kapitler, hvoraf 8 af dem tager udgangspunkt i et fagligt emne, mens de sidste 3 er tematiske kapitler. Til Kolorit 8 hører grundbogen, en kopimappe og Lærerens bog. Vores analyse tager afsæt i kapitlet 'Geometriske eksperimenter' fra grundbogen (Kaas & Kristiansen, 2016) og de tilhørende sider i lærervejledningen (Kaas & Kristiansen, 2012). Lærervejledningen indeholder både, hvilke kompetencer og hvilke matematiske emner der skal arbejdes med igennem kapitlet. Her bliver fremhævet elementer fra blandt andet ræsonnementskompetencen, men det er ikke nærmere beskrevet, hvordan eleverne udvikler kompetencen. Til hver arbejdsside i kapitlet er der tilknyttet en side i lærervejledningen. Disse sider indeholder for eksempel informationer om, hvordan arbejdet med siden kan organiseres, definitioner af fagbegreber og facit til opgaver. Dog får læreren ikke støtte i forhold til, hvordan arbejdet med opgaverne skal stilladseres, således at man får bragt en særlig kompetence i spil. Det er dermed op til læreren selv at finde frem til, hvordan eleverne får udviklet de matematiske kompetencer i dette kapitel.

Kolorit 8

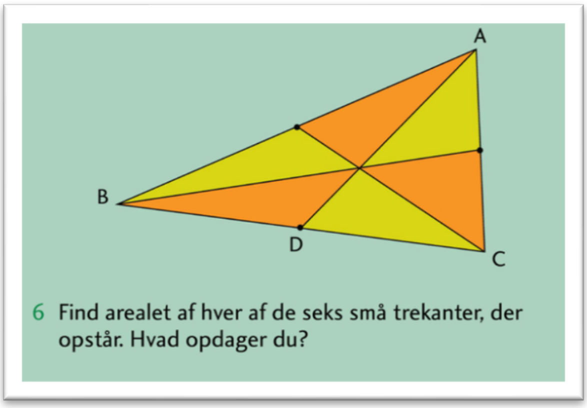
I de følgende afsnit vil vi analysere udvalgte opgaver fra Kolorit 8 (Kaas & Kristiansen, 2016) ud fra definitionerne af kognitive krav (Skott et al., 2018).


1 De to punkter, A og B, forestiller to deltagere set oppefra.
Lav en skitse af situationen og vis, hvor pinden kan være placeret.

Figur 2 (Kaas & Kristiansen, 2016, s. 23)

I ovenstående opgave skal eleverne konstruere en skitse over et ringspil med to punkter, A og B samt en pind, som skal placeres lige langt fra A og B. Eleverne har på siderne forinden arbejdet med midtnormaler, hvilket derfor er en oplagt metode til løsning af opgaven.
Fordi opgaven går ud på at finde ét punkt, der ligger lige langt fra A og B, og der i den indledende tekst står "Pinden er placeret imellem dem" (Kaas & Kristiansen, 2016, s. 23), må det dog antages, at de fleste elever vil vælge at måle afstanden mellem de to punkter og finde midtpunktet. Selvom det ikke er klart, hvilken metode der skal benyttes til at løse opgaven, vurderer vi, at der her er tale om en opgave af typen 1a. Hvis vi antager, at eleverne har brugt Kolorit lærebogen igennem deres skolegang, vil de tidligere være stødt på opgaver, hvor

midtpunktet på et linjestykke skal findes. Fordi opgaven kan løses ved brug af dette, for eleverne, kendte begreb, kan der argumenteres for, at opgaven "Drejer sig om at reproducere tidligere lærte fakta, regler, formler eller definitioner..." (Skott et al., 2018, s. 228).



Figur 3 (Kaas & Kristiansen, 2016, s. 24)

I opgave 6 skal eleverne finde arealet af hver af de seks små trekanter, der opstår, når man indtegner de tre medianer. I en tidligere opgave på samme side skulle eleverne konstruere trekant ABC med én median, markeret ved punktet D, og finde arealet af hver af de to nye trekanter, ABD og ACD. I opgaven er det tydeligt angivet, hvad eleverne skal undersøge på figuren. Da de selv har skullet konstruere trekanten, kan man forestille sig, at de fleste elever har gjort brug af et geometriprogram, som for eksempel GeoGebra, hvorfor det er oplagt for mange at benytte sig af arealfunktionen i GeoGebra til at finde arealet af de seks trekanter. Fordi eleverne gennem opgave 1-5 på samme side har undersøgt forskellige trekanters arealer, højder og grundlinjer, vurderes det at være lærebogens hensigt, at eleverne har gjort den erkendelse, at en median altid deler en vilkårlig trekant i to nye trekanter med samme areal. Derfor mener vi, at mange elever vil gøre brug af deres kendskab til arealformlen for trekanter, til at beregne de enslydende arealer. Det må antages, at elever i 8. klasse har et godt kendskab til arealformlen, hvorfor vi kategoriserer denne opgave som type 1b, da denne type opgaver "Er algoritmiske i den forstand, at det specificeres eller er klart fra tidligere undervisning, hvilken procedure der skal benyttes" (Skott et al., 2018, s. 228).

Af elevernes besvarelser af opgave 6 vil det ikke fremgå, hvorvidt de har benyttet sig af arealformlen, har fundet svaret gennem en funktion i GeoGebra eller måske blot gættet sig til det korrekte svar. Det vil derfor være svært at vurdere, om de har en forståelse for, hvorfor de seks trekanter har samme areal, og opgavens fokus bliver "... at producere det korrekte svar snarere end at udvikle matematisk forståelse" (Skott et al., 2018, s. 228).

> 1 De to punkter, A og B, forestiller to forsvarsspillere set oppefra.
> Lav en skitse af situationen, og vis hvilken del af banen, hver spiller skal dække.

Figur 4 (Kaas & Kristiansen, 2016, s. 22)

I denne opgave skal eleverne konstruere en skitse over en fodboldbane med to spillere, symboliseret ved punkterne A og B. Hertil skal de markere, hvilken del af banen hver af de to spillere skal dække. I den indledende tekst bliver det beskrevet, at hver spiller dækker det område, der er nærmest dem selv, og at hele banen skal dækkes. Det er ikke givet, hvilken metode eller procedure der skal benyttes, og det er derfor nødvendigt, at eleverne forstår "... det begrebslige indhold i proceduren for at kunne klare udfordringen i oplægget" (Skott et al., 2018, s. 229). Ved proceduren forstås her konstruktion af midtnormalen. I modsætning til opgave 1 på side 23, som vi kategoriserede som en niveau 1a, er det altså her nødvendigt, at eleverne både forstår egenskaberne ved begrebet midtnormal, og hvordan de benytter den, og der kan derfor argumenteres for, at opgaven hjælper eleverne til "...at udvikle bedre forståelser af matematiske begreber og idéer vha. proceduren" (Skott et al., 2018, s. 229), hvorfor vi har placeret denne opgave på niveau 2a.

> 10 Diskuter, om alle firkanter har en omskrevet og en indskrevet cirkel. Hvorfor? Hvorfor ikke?

Figur 5 (Kaas & Kristiansen, 2016, s. 29)

Ovenstående opgave er den sidste ud af ti omhandlende omskrevne og indskrevne cirkler. I de ni foregående opgaver har eleverne skullet forholde sig til forhold vedrørende trekanters omskrevne og indskrevne cirkler, men i denne opgave bliver sammenhængen mellem cirklerne og firkanter behandlet. Det forventes altså, at eleverne kan bruge de erkendelser om trekanters omskrevne og indskrevne cirkler, de har fået i de foregående opgaver, til at diskutere spørgsmålet her. Vi vælger at placere denne opgave på niveau 2b, da de kognitive krav ved tilføjelsen af spørgsmålene 'Hvorfor? Hvorfor ikke?' bliver højnet. Som nævnt tidligere, relaterer opgaver med høje kognitive krav sig netop til det at *vide hvorfor* (Skott et al., 2018). Selvom spørgsmålet umiddelbart afkræver et ja/nej svar, må eleverne altså argumentere for deres svar, hvilket forudsætter, at de "... udforsker og forstår meningen med matematiske begreber, processer og relationer" (Skott et al., 2018, s. 229). Fordi de hidtil kun har erfaring med, hvordan man finder trekanters omskrevne og indskrevne cirkler, kræver det desuden, at de "... analyserer oplægget og forhold, der kan begrænse brugen af mulige strategier og løsninger" (Skott et al., 2018, s. 229), for at finde frem til, om samme fremgangsmetode kan bruges i arbejdet med en anden geometrisk figur. Det kan være nærliggende at kategorisere opgave 10 som 2a, da proceduren til bestemmelse af trekanters omskrevne og indskrevne cirkler kan udvides og dermed give svar på spørgsmålet om, hvorvidt alle firkanter har omskrevne og indskrevne cirkler. Da vi mener, at 'Hvorfor? Hvorfor ikke?' spørgsmålet lægger op til en mere matematisk argumentation, vil vi fastholde vores vurdering af opgaven som en 2b. Dog vil vi i diskussionen komme med forslag til, hvordan opgavens kognitive krav kan løftes yderligere.

I vores analyse af kapitlet har vi fundet frem til følgende fordeling af opgavernes kognitive niveauer (Bilag 1):

Kognitivt niveau	Antal opgaver	≈ Procent
1a – Hukommelsesoplæg	23	40%
1b – Procedurer uden forbindelser	19	33%
2a – Procedurer med forbindelser	14	25%
2b – Oplæg med matematisk tænkning	1	2%
Sum	57	100%

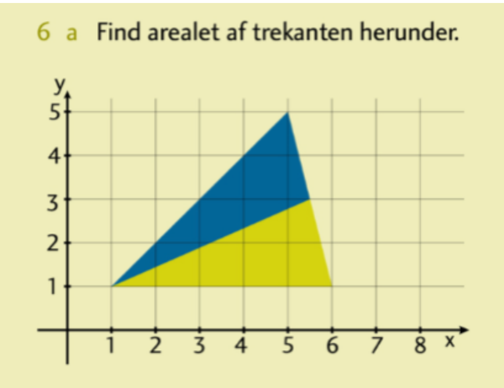
Figur 6

Vi har vurderet, at kapitlet indeholder en overvægt af opgaver med lave kognitive krav. Blot 25% af opgaverne er af typen 2a og 2% af typen 2b. Det er ifølge Skott et al. (2018) ikke meningen, at eleverne kun skal arbejde med opgaver med høje kognitive krav, og overvægten af opgaver med lave kognitive krav er dermed ikke nødvendigvis et problem. Dog kan der stilles spørgsmålstegn ved, hvorvidt eleverne kommer til at arbejde med opgaver med matematisk tænkning i tilstrækkelig grad.

Hvis vi antager, at kapitlet er repræsentativt for de resterende kapitler i bogen, betyder det, at eleverne i arbejdet med opgaverne i bogen primært bliver udfordret på deres instrumentelle forståelse af matematik. I det analyserede kapitel er 73% af opgaverne vurderet til at stille lave kognitive krav til eleverne. De er af typen 1a eller 1b, og opgaverne omhandler derfor primært udenadslære, ligesom de "Er fokuserede på at producere det korrekte svar snarere end at udvikle matematisk forståelse" (Skott et al., 2018, s. 228). I de resterende 27% af opgaverne vil eleverne i højere grad få mulighed for at arbejde mod en relationel forståelse, da arbejdet med opgaver med høje kognitive krav fordrer, at eleverne udvikler forståelser for matematiske sammenhænge.

Case

Følgende case er fra vores praktikforløb i 8. klasse. Vi arbejdede ud fra kapitlet 'Geometriske eksperimenter' i Kolorit 8 (Kaas & Kristiansen, 2016), men tilføjede i vores planlægning af lektionerne nogle spørgsmål og opgaver, vi vurderede som stillende højere kognitive krav til eleverne. Dette gjorde vi, fordi vi ønskede at arbejde mod en mere relationel forståelse og samtidig få bedre indsigt i elevernes matematiske tænkning. I nærværende case er vi nået til de sidste lektioner i forløbet. I første del af casen arbejder eleverne med opgaverne på side 30-31, hvor vi til opgave 6 (figur 7) har tilføjet spørgsmålet 'Hvis trekantens sidelængder var dobbelt så lange, hvor stort ville arealet så blive? Og hvad hvis sidelængderne var tre gange så lange?'.



Figur 7 (Kaas & Kristiansen, 2016, s. 31)

1. *del*

Eleverne arbejder to og to. Søren og Lars er nået frem til, at arealet af trekanten er 10 og diskuterer nu, hvad der vil ske, hvis sidelængderne var dobbelt så lange.

Lars: "Hvis vi nu kigger på formlen for arealet af en trekant, så må det være A=0,5·h·g, og hvis siderne skal være dobbelt så store, så kan vi sige at 10·2=0,5·4·5·2".

Søren: "Ja, så vi ganger bare med to på begge sider, så bliver det jo 20. Skal vi se om det så også passer?"

De forsøger at tegne en trekant med grundlinjen 10, men går i stå.

Lars: "Men hvordan tegner vi de andre sider dobbelt så lange, længderne er sådan nogle kommatal?"

Praktikanten kommer forbi Søren og Lars og spørger, om de er nået frem til noget.

Lars: "Vi kan ikke helt huske, hvordan vi tegner trekanten, så alle siderne bliver dobbelt så lange. Vi har tegnet den her på 10, men..."
Praktikanten: "Så skal I jo bare tegne højden dobbelt så lang, så ligger punktet lige her i (9,9). Så hvad bliver arealet så?"
Søren: "Så er det 10·8·0,5, så bliver det jo 40".
Praktikanten: "Ja det er rigtigt. Prøv at finde arealet, når siderne bliver tre gange så lange, så kommer jeg tilbage og hører jeres svar".
Praktikanten går videre til næste gruppe.
De indtegner en grundlinje med længden 15.
Søren: "Så skal højden nok være 12, men hvor skal den være?"
Eleverne stopper arbejdet og begynder at tale om, hvad de skal lave i weekenden.

Med tilføjelsen af spørgsmålet: 'Hvis trekantens sidelængder var dobbelt så lange, hvor stort ville arealet så blive? Og hvad hvis sidelængderne var tre gange så lange?' ændres opgavens kognitive krav. Opgaven uden tillægsspørgsmålet kan løses ved at tælle antallet af felter i trekanten, hvorfor der kan argumenteres for, at opgaven er af typen 1a. Men da opgaven har en tydelig algoritmisk løsning, i form af trekanters arealformel, og ikke kræver en uddybende forklaring, må den betegnes som en type 1b. Den udvidede opgave stiller højere kognitive krav til eleverne og må betegnes som opgavetypen 2a. En opgave på niveau 2a "Fokuserer på at udvikle bedre forståelser af matematiske begreber og ideer vha. proceduren" (Skott el al., 2018, s. 229). Opgaven kan med tillægsspørgsmålet betegnes som det Hansen og Hansen (2013) kalder en *bekræftende undersøgelse*. I en undersøgelse af denne type har læreren til hensigt, at eleverne skal nå frem til en matematisk pointe, og aktiviteten har kun få frihedsgrader. Elevernes undersøgelser skal gerne føre yderligere spørgsmål med sig, og i denne opgave kunne et sådant spørgsmål for eksempel være: 'Hvad sker der, hvis sidelængderne femdobles? Kan der findes en generel regel for sammenhængen mellem sidelængder og areal?'.

Elever i 8. klasse har gode forudsætninger for at kunne løse opgaven, idet de må antages at være bekendte med arealformlen for en trekant. Dog skal de i tillægsopgaven opdage sammenhængen mellem en fordobling af sidelængderne og den medførende firedobling af arealet, og opgaven består derfor ikke længere kun i korrekt brug af arealformlen, den kan derimod løses på forskellige måder, afhængig af elevernes forudsætninger. Det lader ikke til, at Søren og Lars er nået til den erkendelse, at en fordobling af trekantens sidelængder medfører en fordobling af trekantens højder. De forsøger at forstå den matematiske sammenhæng mellem sidelængder og areal gennem brug af ligningsløsning, hvilket indikerer, at de er i stand til at benytte arealformlen, men i oversættelsen fra ræsonnement til en algebraisk løsningsstrategi går det begrebslige indhold i proceduren tabt.

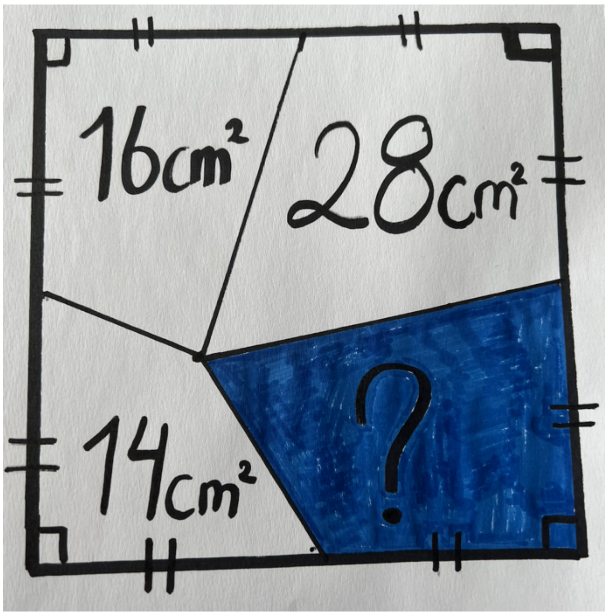
I stilladsbygning må læreren først se et behov for stilladsering, for dernæst at bygge stilladset op om elevens zone for nærmeste udvikling (Lindén, 1997). Da praktikanten henvender sig til Søren og Lars, giver de udtryk for problemer i arbejdet med at indtegne trekanten. Hun konstaterer derved, at der er et behov for støtte, men i hendes stilladsering af opgaven kunne det tyde på, at hun kommer til at overtage elevernes proces. For at tilbyde en passende støtte, må læreren forstå, hvad elevernes virksomhed retter sig imod, så stilladset kan bygges op omkring elevernes projekt (Lindén, 1997). Praktikanten ser ikke, at Søren og Lars er i gang med et forsøg på at verificere deres svar, og i stedet for at støtte dem indenfor deres nærmeste udviklingszone og i projektet om brug af ligninger, fortæller hun dem, at højden skal fordobles, og at det sidste punkt i trekanten skal placeres i (9,9). Når praktikanten siger: "*Så skal I jo bare tegne højden dobbelt så lang...*" får hun markeret en vigtig sammenhæng i ligedannede trekanter, idet hun fortæller, at hvis sidelængderne fordobles, vil højden også fordobles. Denne kommentar kan derfor betragtes som gørende brug af stilladseringsfunktionen *markering af kritiske træk*, der både handler om at gøre eleverne opmærksomme på, om de er på rette vej eller ej og om synliggørelsen af særligt vigtige træk i opgaven. Et andet element i denne stilladseringsfunktion er, at eleverne retter deres blik mod arbejdsprocessen og justerer eventuelle fejltrin (Hansen & Nielsen, 1999). Denne effekt af praktikantens brug af funktionen udebliver dog, da hun samtidig med informationen om længdernes indbyrdes forhold, giver eleverne svaret på, hvor punktet skal placeres. Dette afstedkommer en situation, hvor Topaze-effekten råder, da praktikanten får hjulpet eleverne i en sådan grad, at de kan svare rigtigt på spørgsmålet om arealets størrelse, men hvor læringspotentialet i opgaven forsvinder.

Søren og Lars er tilsyneladende interesserede i at forstå den matematiske sammenhæng i opgaven, idet de forsøger at bekræfte deres svar gennem en tegning. Det er ikke en del af opgaven, at de skal indtegne trekanterne, og de har fået en metode til løsning af opgaven af læreren. Dette er et tegn på, at praktikanten opfatter en korrekt brug af metoden som tilstrækkelig, på trods af hendes ambition om, at eleverne skulle arbejde mod en relationel forståelse. Eleverne forsøger derimod at finde forklaringen bag gennem deres visualisering af trekanten. Der er altså uoverensstemmelser mellem den instrumentelle forståelse, som praktikanten udtrykker er tilstrækkelig og den relationelle forståelse, eleverne ønsker at opnå. Ifølge Skemp (2006) kan konsekvenserne af dette være af omfattende betydning for elevers læring, da de kan blive frustrerede og kede af det, når de ikke føler, at de forstår matematikken. Situationen beskrevet i casen kan desuden ses som et udtryk for Søren og Lars' ønske om at arbejde med ræsonnementer, da denne kompetence blandt andet indeholder at kunne bedømme holdbarheden af matematiske påstande ('højden bliver dobbelt så lang, når siderne bliver det' og 'arealet bliver fire gange så stort, når sidelængderne fordobles') og overbevise sig selv og andre om gyldigheden af disse påstande (Niss & Jensen, 2002). Når Søren og Lars ønsker at forstå den matematiske sammenhæng i opgaven, kan det skyldes nogle sociomatematiske normer, hvori deres forestillinger om, hvad der kendetegner en god matematisk løsning, afhænger af evnen til at forstå den bagvedliggende forklaring.

En betingelse for en vellykket stilladsering er, at eleven på et senere tidspunkt er i stand til at gøre stilladset overflødigt. For at dette kan lade sig gøre, må stilladset netop være bygget op omkring zonen for nærmeste udvikling, således at eleven kan aktivisere det og udvikle sig på baggrund af støtten (Lindén, 1997). Da Søren og Lars når til at skulle tredoble trekantens sidelængder, ved de stadig ikke, hvordan de skal tegne trekanten. Samtidig lader det ikke til, at de ved, hvorfor deres algebraiske udregning ikke fungerede. De har altså ikke modtaget den nødvendige stilladsering i opgaven forinden til at kunne løse denne opgave. Da Søren siger: *"Så skal højden nok være 12, men hvor skal den være?"*, er det et udtryk for, at han har forstået, at grundlinjen og højden bliver ændret med samme faktor. Men om denne forståelse bygger på en instrumentel regel, han måske vil kunne benytte igen – forudsat at han kan huske den – eller om han har forstået, hvorfor det forholder sig sådan, er uvist.

Manglen på støtte til løsning af opgaverne kan af eleverne betragtes som et brud på den didaktiske kontrakt. Selvom de når frem til, at højden skal være 12, ved de ikke, hvordan de skal placere den på figuren og derigennem bevise overfor dem selv, at metoden fungerer. De har fået tilbudt en metode til udregning af opgaven, men det er ikke den metode, de gerne vil have. Deres snak om weekendplaner kunne tyde på, at de har mistet motivationen for opgaven, hvilket ifølge Lindén (1997) er en kendt konsekvens af for meget støtte. Praktikanten får desuden ikke gjort brug af stilladseringsfunktionen *frustrationskontrol*, der handler om at hjælpe eleverne med at fastholde de positive elementer i arbejdsprocessen, for at bibeholde en tiltro til egne evner (Brodersen & Gissel, 2015), idet hun ikke får ledt dem på vej på en måde, der gør dem i stand til at løse opgaven.

I casens anden del får eleverne stillet en tillægsopgave. I opgaven skal de finde det blå areal (figur 8) hvilket kræver, at de benytter deres algebraiske viden, foruden deres viden om trekanter. Årsagen til at vi lavede disse tilføjelser var et ønske om, at eleverne skulle arbejde mere undersøgende, hvor der ikke på forhånd var angivet en metode til løsning. Vi ønskede et særligt fokus på ræsonnementskompetencen, og da de igennem kapitlet havde arbejdet meget med enkelttilfælde, var hensigten derfor at arbejde med vidensmålet "Eleven har viden om forskel på generaliserede matematiske resultater og resultater, der gælder i enkelttilfælde" (Børne- og Undervisningsministeriet, 2019).



Figur 8

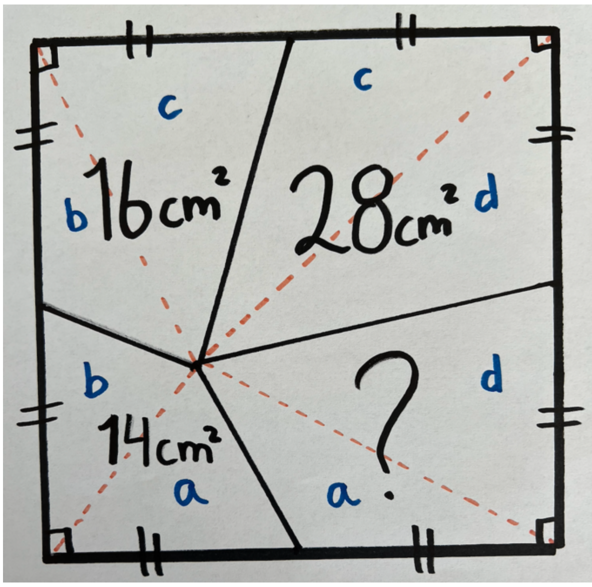
2. *del*

Praktikanten præsenterer opgaven og spørger: "Hvor stort er det blå areal? Prøv i jeres bordgrupper at snakke om nogle løsningsstrategier og finde frem til nogle ideer til, hvordan man kan løse den her".

Klasselokalet fyldes af stemmer, og eleverne forsøger i grupperne at komme med ideer til, hvordan opgaven kan løses. Der bliver nævnt vinkelhalveringslinjer, midtpunktstransversaler, medianer og andre matematiske begreber, de har været igennem i kapitlet. En gruppe forsøger sig med at dele hver firkant, så de får fire retvinklede trekanterne (Bilag 2), men går hurtigt i stå. De kalder på praktikanten og siger: "Vi ved ikke, hvordan vi skal komme videre". Praktikanten svarer, at de kan prøve at tænke over, *hvad de ved om trekanters areal. Gruppemedlemmerne taler videre et par minutter, før en af dem siger: "Jeg fatter ikke en skid" og begynder at tegne kruseduller på sit papir. Efter cirka 15 minutter afbryder praktikanten eleverne, da ingen af grupperne er nået frem til en løsning. Hun bruger resten af undervisningen på at gennemgå, hvordan opgaven løses.*

I casens anden del skal eleverne arbejde med en udfordrende opgave. Opgaven er af typen 2b, da den "Kræver kompliceret, ikke-algoritmisk tænkning" (Skott el al., 2018, s. 229), og løsning af opgaven vil involvere, at eleverne finder relevant viden og forsøger sig med forskellige tilgange. Opgaven kan betegnes som det Hansen & Hansen (2013) definerer som en *guidet undersøgelse*, der er kendetegnet ved, at læreren definerer spørgsmålet, men lader undersøgelsesdesignet være op til eleverne. Der lægges i opgaven op til, at eleverne "... ræsonnerer, argumenterer, drager konklusioner..." (Pind, 2015, s. 8) igennem afprøvninger og eksperimenter.

For at løse opgaven, må eleverne først bruge deres viden om, at symbolet bestående af to parallelle streger på et linjestykke indikerer, at alle sider med dette symbol har samme længde. Dermed kan det konstateres, at tegningen viser et kvadrat med en markering af midtpunkter på alle fire sider. Dernæst skal eleverne bruge deres viden om trekanter, nærmere bestemt faktummet, at to trekanter med samme grundlinje og samme højde har samme areal. Når man har set, at man kan dele figuren op i fire par af to trekanter med samme areal, skal de enslydende arealer navngives med enslydende notationer (figur 9).



Figur 9

Dernæst må man opstille en ligning bestående af notationerne, hvorefter man udskifter disse med talværdierne i figuren, for til sidst at finde størrelsen på det manglende areal. Samtidig vil man nødvendigvis nå til den konklusion, at summen af det ene par af modstående firkanters arealer svarer til summen af det andet pars arealer.

I KiDM-projektet arbejdes der med fem typer af undersøgende aktiviteter. En af aktiviteterne kaldes *Opdagelsen* og for denne gælder, at eleverne skal "Afprøve og udlede begrebsmæssige sammenhænge" (Hansen et al., u.å., s. 6). I en aktivitet af typen Opdagelsen vil både problem, metode og resultat for læreren være kendt. Man ønsker at bibringe eleverne en erkendelse af en matematisk sammenhæng eller et matematisk begreb, og aktivitetsfasen betegnes som undersøgende, idet både metoden og resultatet er ukendte for eleverne. Der er desuden en vis grad af åbenhed, da eleverne skal arbejde undersøgende for at opnå ny viden, fremfor at øve sig på en, af læreren, formidlet viden (Hansen et al., u.å). Eleverne må altså bruge deres faglige viden og erfaringer til at undersøge forskellige muligheder for løsning af opgaven. Hensigten er, at de gennem arbejdet med den konkrete opgave kan nå frem til en generaliseret erkendelse af en matematisk sammenhæng.

Opgaven om bestemmelse af det blå areal kan siges at være af typen Opdagelsen. For praktikanten er der en klar hensigt med opgaven, idet hun ønsker, at eleverne skal arbejde med deres ræsonnementskompetence og med at udforske og forstå "... meningen med matematiske begreber, processer og relationer" (Skott el al., 2018, s. 229). Både metoden til løsning af opgaven og svaret på opgaven er for praktikanten kendt, men for eleverne fremstår opgaven meget åben. Dette forstærkes af praktikantens stilladsering – eller mangel på samme. Da både for lidt og for meget støtte kan bevirke, at eleverne mister motivationen for en opgave, er det vigtigt at afstemme sin stilladsering til elevernes nærmeste udviklingszone (Lindén, 1997). Praktikanten giver ingen indledende forklaringer til opgaven, men siger blot: *"Hvor stort er det blå areal? Prøv i jeres bordgrupper at snakke om nogle løsningsstrategier og finde frem til nogle ideer til, hvordan man kan løse den her".* Hun får desuden kun støttet eleverne i deres proces i begrænset omfang, for eksempel da hun siger, at de kan overveje, hvad de ved om trekanters areal. Med denne kommentar gør hun brug af stilladseringsfunktionen *markering af kritiske træk*, idet hun synliggør en vigtig komponent i løsningsprocessen. Stilladseringen lader dog ikke til at være tilstrækkelig, da eleverne efter et par minutters snak om trekanter mister fokus. De formår altså ikke at justere deres arbejde, hvorfor praktikantens brug af denne stilladseringsfunktion ikke kan betragtes som succesfuld.

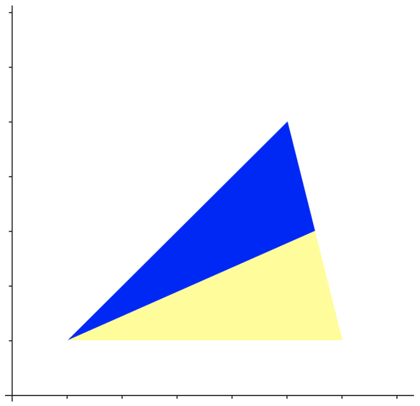
Eleverne i gruppen spørger selv om hjælp, og fortæller, at de ikke ved, hvad de skal. Praktikanten bliver derfor opmærksom på deres behov for støtte, hvilket er det første trin i stilladsbygning (Lindén, 1997) men som nævnt formår hun ikke at bygge det næste trin i stilladset. At det ene gruppemedlem siger: *"Jeg fatter ikke en skid"* og begynder at tegne på sit papir kan tyde på, at hun har fokus på det, hun ikke formår. Stilladseringsfunktionen *frustrationskontrol* handler om at holde fast i de positive elementer i elevernes arbejde (Brodersen & Gissel, 2015), og en måde at støtte eleverne i øjeblikke af frustration er gennem verbal opmuntring eller konkret hjælp (Gissel, 2020). At praktikanten antyder, at eleverne skal bruge deres viden om trekanter kan være et forsøg på en konkret hjælp, men det lader ikke til at være nok. Når man arbejder med opgaver af typen Opdagelsen, skal man passe på ikke at overtage elevernes argumentation i sin iver for at tydeliggøre den faglige pointe (Larsen & Lindhardt, 2019). I casen ses det, at praktikanten ikke får stilladseret eleverne tilstrækkeligt, og de lykkes derfor ikke med at opdage de matematiske sammenhænge, som var hensigten med opgaven. Derfor er det praktikanten, der ender med at argumentere for den korrekte løsning, uden at eleverne egentlig er med i processen. Til gengæld får de mulighed for at træne deres evne til at "... følge (…) et matematisk ræsonnement..." (Niss & Jensen, 2002, s. 54).

Praktikantens begrænsede indblanding i elevernes arbejde gør det til en a-didaktisk situation, hvilket umiddelbart kan siges at være fordrende for elevernes læring: "... læring kan umuliggøres, hvis eleverne ikke engagerer sig selvstændigt i de oplæg, de skal arbejde med" (Skott et al., 2008, s. 430). At eleverne skal engagere sig selvstændigt, forudsætter dog, at de har fået værktøjerne til at kunne løse opgaven. Det kunne tyde på, at eleverne ikke er vant til at arbejde på denne meget selvstændige måde, hvilket giver udfordringer i forhold til, hvordan de skal gå til opgaven. Hvis der i et klasserum er en didaktisk kontrakt, der indeholder, at læreren stiller opgaver, der taler til den instrumentelle forståelse, som eleverne kan genkende og dermed har gode forudsætninger for at løse, kan en undersøgende opgave opleves som et brud på kontrakten. Ifølge Hansen & Hansen (2013) bør man starte en undersøgende praksis med en i højere grad lærerstyret aktivitet, som for eksempel en *bekræftende* eller *struktureret undersøgelse*, hvor eleverne får givet fremgangsmåden. En *guidet undersøgelse* som denne stiller langt højere kognitive krav til eleverne, da den både kræver, at eleverne "... selv finder relevant viden og relevante erfaringer, som de kan trække på i deres tilgang til oplægget" og "... selv analyserer oplægget og forhold, der kan begrænse brugen af mulige strategier og løsninger" (Skott et al., 2018, s. 229).

Eleverne er ikke i stand til at løse opgaven, hvilket for dem kan opfattes som praktikantens brud på den usagte aftale. Hvis elever ikke har erfaring med denne type aktivitet, vil de endog have svært ved at forsøge at løse opgaven (Hansen & Hansen, 2013), hvilket for lærerens vedkommende kan betragtes som om, de ikke forsøger at lære (Skott et al., 2008). I praktikantens forsøg på at overholde den didaktiske kontrakt – at hun skal undervise og eleverne lære – vælger hun at forklare, hvordan opgaven løses. I og med at eleverne ikke selvstændigt når frem til nogle sammenhænge, får de ikke selv gjort sig erfaringer med at arbejde undersøgende eller udvikle ræsonnementer. Ud fra en tese om at læring særligt finder sted i sociale kontekster, gennem dialog og samarbejde, og at viden konstrueres i fællesskab (Beck et al., 2014), får de ikke det optimale ud af læringssituationen. Praktikantens hensigt med denne opgave er, at eleverne skal arbejde mod en relationel forståelse af matematiske sammenhænge. De skal være ræsonnerende og selv skabe "en kæde af argumenter (…) til støtte for en påstand" (Niss & Jensen, 2002, s. 54). Men grundet den utilstrækkelige stilladsering og elevernes manglende erfaringer med at arbejde på denne måde, lykkes projektet ikke.

Diskussion

Skott et al. (2018) præsenterer tre forskellige måder, hvorpå læreren kan lave ændringer, så en opgaves kognitive krav højnes. De tre type af ændringer er at fjerne, ændre eller tilføje informationer til opgaverne. Hvis man fjerner informationer i en opgave, kan det åbne op for flere mulige svar. Dette kan i opgave 6 på side 31 (Kaas & Kristiansen, 2016) gøres ved at fjerne gitterlinjerne og informationerne på akserne (figur 10).



Figur 10

Eleverne skal stadig finde trekantens areal, men opgaven bliver løftet op på et højere kognitivt niveau, idet eleverne ikke længere kan følge proceduren blindt. De må i stedet overveje, hvorvidt det overhovedet er muligt at finde et svar på spørgsmålet, og hvilke oplysninger de har behov for, for at kunne finde et svar. Når oplysningerne fjernes, må eleverne gennem dialog og diskussioner argumentere for en løsning, hvilket kan være med til at bidrage til udvikling af deres ræsonnementskompetence. Med ændringen kan der drages paralleller til den undersøgende opgavetype 'Manglende oplysninger' (Pind, 2015). Her fjerner læreren oplysninger fra en lukket opgave, så det er op til eleverne at finde ud af, hvilke oplysninger de mangler, for dernæst at definere disse og med dem kunne løse opgaven (Pind, 2015). Læreren kan bede eleverne om at løse opgaven på tre forskellige måder: den almindelige løsning, som er en, eleverne vurderer, at andre elever også kunne finde på, en vanskelig løsning, som ville give eleverne mere arbejde, og en smart løsning, som enten er nem at regne på eller uden behov for at regne (Pind, 2015). At eleverne skal komme med tre løsninger er en måde, læreren kan stilladsere eleverne, så de ved, hvad der kan betragtes som en fyldestgørende arbejdsindsats med en opgave (Pind, 2015). Man kan dog diskutere ordvalget for de tre løsninger. En almindelig løsning for en elev kan være en vanskelig løsning for en anden elev. Derfor skal man i arbejdet med disse tre løsninger være meget opmærksom på, om det kommer til at udstille enkelte elever i klassen.

Hvis man i stedet ændrer på de oplysninger, eleverne får i opgave 6, kunne opgaven lyde således: 'Hvordan kan en trekant med et areal på 10 se ud?'. Opgavens oplysninger er dermed vendt på hovedet og i stedet for, at eleverne skal gennemføre en udregning, får de et resultat. I den reviderede opgave kan eleverne bestemme forskellige trekanter, som opfylder et areal på 10, hvilket kan give anledning til, at eleverne undersøger sammenhænge mellem trekanters areal, og grundlinjen og højden. Arbejdet med opgaven kunne medføre nye spørgsmål og undersøgelser, som eksempelvis 'Hvad mon de størst mulige værdier af grundlinjen og højden er' eller 'Hvad sker der med grundlinjen hvis højden ændres?'. Derfor ville denne ændring af oplysninger højne de kognitive krav. Opgaven vil nu være af typen *Svaret er givet*, som er en anden type af åbne og undersøgende opgaver i matematik (Pind, 2015). I denne type opgave er det op til eleven at finde en løsningsmetode, hvorpå resultatet kan findes. Læreren kan også her bede eleverne om at komme med en almindelig, en vanskelig og en smart løsning (Pind, 2015). I den overstående opgave kunne en almindelig løsning være en retvinklet trekant med grundlinjen 5 og højde 4, en smart løsning kunne være en retvinklet trekant med en grundlinje på 20 og en højde på 1, mens en vanskelig løsning kunne være, at trekanten skulle være stumpvinklet.

Den sidste ændring, at tilføje information, er det, som praktikanterne gør i casens første del. Der er tilføjet spørgsmålene '*Hvis trekantens sidelængder var dobbelt så lange, hvor stort* *ville arealet så blive? Og hvad hvis sidelængderne var tre gange så lange?'*. I casens første del ses det, at Søren og Lars støder på et problem, når de forsøger at verificere deres svar ved at tegne trekanten. Man kan argumentere for, at denne trekant kan være svær at tegne for nogle elever, fordi højden hverken ligger midt på grundlinjen, så trekanten er ligesidet eller for enden af grundlinjen, som i en retvinklet trekant. Praktikanten fortæller eleverne, hvor de skal placere højden, men som det fremgår af casen, har de svært ved at bruge denne hjælp fremadrettet, når de igen skal tegne en ny trekant. I stedet for at give Søren og Lars svaret og derefter forlade dem, kunne praktikanten i sin stilladsering have forholdt sig nysgerrigt til deres proces, som både indebærer et algebraisk element og en visualisering af opgaven. En del af den undersøgende proces er den mangfoldighed af muligheder, eleverne kan benytte sig af. For læreren betyder det, at man må være klar til at møde eleverne i en nogle tankemønstre, som måske slet ikke ligner dem, man selv havde forestillet sig (Larsen, 2019).

Hvis praktikanten havde givet sig selv og eleverne tid til at gennemgå de foreløbige bud på løsninger, havde hun opdaget et kritisk punkt i deres forståelse for relationen mellem dimensionerne i trekanten, som det kommer til udtryk i deres ligningsløsning. Havde hun været opmærksom på dette, ville hun i højere grad kunne have gjort brug af stilladseringsfunktionen *markering af kritiske træk*, for at lede eleverne på rette vej mod en korrekt løsning. En anden måde, hun kunne have gjort brug af denne stilladseringsfunktion, ville være ved at spørge eleverne, om de kunne placere højden, hvis trekanten havde været retvinklet. I stedet for at give Søren og Lars svaret på, hvor højden skal placeres, kunne dette spørgsmål have hjulpet dem til at reflektere over trekanters indbyrdes relationer. Hvis eleverne tegnede en retvinklet trekant og gik tilbage til deres metode om ligningsløsning, hvor de tilføjede *·2* på begge sider af lighedstegnet, ville de i deres tegning af trekanten med dobbelt så lange sider opdage, at de to ikke stemmer overens. Hvis de med denne erkendelse gik tilbage for at undersøge, hvor de havde lavet fejl, kunne disse erfaringer have ført til en bedre matematisk forståelse.

Skemp (2006) argumenterer for, at undervisning bør have et større fokus på den relationelle forståelse. Med en relationel forståelse for matematikken vil eleverne i højere grad kunne finde løsninger til opgaver, der afviger fra dem, de tidligere er stødt på, fordi de kan relatere metoden eller reglen til det nye problem. Man har både forståelse for, hvornår en metode kan bruges, men lige så vigtigt, i hvilke opgaver den ikke fungerer (Skemp, 2006). I casens første del ses det, at praktikanten får givet eleverne en støtte, som har den konsekvens, at de ikke får opbygget en forståelse for den læring, praktikanten har til hensigt. Eleverne stopper arbejdet og begynder at tale om andet end matematik, og det lader derfor til, at de har mistet motivationen. Skemp (2006) vurderer, at fordi relationel viden kan fungere som et mål i sig selv, vil det for læreren blive nemmere at motivere eleverne, hvis man arbejder mod denne type af forståelse. Da der i formålsparagraffen står beskrevet, at folkeskolen skal give eleverne "... lyst til at lære mere..." (Børne- og Undervisningsministeriet, 2022), er relationel undervisning en oplagt måde at gøre læringen mere meningsgivende for dem. Samtidig er den instrumentelle forståelse nødvendig, da det er en omfattende opgave at udlede en formel hver gang, man eksempelvis skal finde arealet af en trekant. At Skemp (2006) alligevel argumenterer for et større fokus på den relationelle forståelse skyldes, at en grundlæggende forståelse af eksempelvis arealsammenhænge vil være til gavn længe efter, man har glemt, hvordan en specifik formel lyder.

I casens første del ønsker Søren og Lars at få et visuelt bevis på, at deres beregninger er korrekte. De forsøger at skabe sammenhæng mellem flere repræsentationer, og selvom en tegning af trekanten ikke kan betegnes som et matematisk bevis, tyder det på, at de ønsker at overbevise sig selv om rigtigheden af deres påstand. For mange elever er empiriske observationer mere overbevisende end matematiske beviser (Larsen, 2019). De kan altså føle sig overbevist om validiteten af et argument på baggrund af deres egne undersøgelser. Elevers empiriske undersøgelser er dog vigtige i arbejdet med ræsonnementer, fordi elevernes egne opdagelser kan være med til at omdanne disse til matematiske generaliseringer (Larsen, 2019). Det vil sige at "... omforme heuristiske ræsonnementer til egentlige (gyldige) beviser" (Niss & Jensen, 2002, s. 54). Det lader til, at det er denne proces, Søren og Lars er i, men ikke får mulighed for at færdiggøre, grundet praktikantens indblanding. Ifølge Brousseau (Fra: Skott et al., 2008) sker læringen primært i de a-didaktiske situationer i undervisningen, hvor læreren indtager en mere passiv rolle. Dog lever praktikanten i denne del af undervisningen ikke op til rollen som den passive. I stedet bliver den potentielt undersøgende aktivitet reduceret til et forsøg på videns-overførsel.

En del af den undersøgende proces er, at man i aktivitetsfasen både kan blive usikker og lave fejl, og fejlene er derfor vigtige for læringen (Hansen et al., u.å.). For læreren er det lige så vigtigt at acceptere, at eleverne møder udfordringer, og man må passe på ikke at komme til at overtage elevernes proces ved at give dem svaret, i forsøget på at hjælpe dem med at undgå frustration eller manglende motivation (Lindén, 1997). I casen kan det, at praktikanten ønsker at holde eleverne til ilden være årsagen til, at hun får givet dem for meget hjælp. Som lærer vil man ofte gerne have det rigtige svar klar til eleverne, for at kunne hjælpe dem på vej. Men i stedet for at være fikseret på lige præcis den løsning, man selv har forberedt, kan man overveje, om eleverne lærer mest ved at følge den planlagte vej eller ved at finde deres egne metoder.

I casens del to kan det konstateres, at praktikantens hensigt med opgaven ikke lykkes. Begrundelsen for at tilføje ekstraopgaven var et ønske om at lade eleverne udvikle matematiske ræsonnementer. Men casen viser imidlertid, at praktikanten ikke formår at involvere eleverne i en ræsonnerende virksomhed, grundet manglende stilladsering og den uvante arbejdsform. Samtidig viser forskning, at hvis målet er, at eleverne skal udvikle en forståelse for et matematisk koncept – som det er tilfældet i en aktivitet af typen Opdagelsen – vil lærerens fokus på elevernes kæder af ræsonnementer ikke vægtes lige så højt, som i nogle af de andre typer af aktiviteter, hvor fokus er på elevernes argumentationer og forklaringer af processen (Larsen, 2019). Praktikanten vælger at gennemgå løsningen, da ingen af eleverne formår at nå frem til en løsning. Det, at praktikanten vælger at gennemgå opgaven, kan være et tegn på, at hun har en formodning om, at eleverne gennem hendes forklaringer kan tilegne sig den viden, hun ønsker, de skal opbygge. Idet vi har argumenteret for et socialkonstruktivistisk læringssyn, må vi antage, at eleverne – eller nogle af dem – kunne forstå løsningen, men sandsynligvis ikke har lært noget, som de i tilstrækkelig grad vil kunne benytte i en anden undersøgende opgave. For at læring kunne have fundet sted, kunne praktikanten have brugt flere stilladserende spørgsmål, tilpasset til de enkelte gruppers proces. Med en god og passende stilladsering ville funktionen *reducering af frihedsgrader* være oplagt at få i spil, og hun ville dermed kunne møde eleverne i deres zone for nærmeste udvikling. Reducering af frihedsgrader handler det om at begrænse opgaven, så antallet af skridt, der er nødvendige at gennemgå, bliver færre eller mere overskuelige, og opgaven dermed mere overkommelig for eleverne (Gissel, 2020). Man kunne have startet med en præsentation af opgaven, hvorefter eleverne i deres grupper fik 5-10 minutter til at diskutere ideer og komme med forslag. Herefter ville det være oplagt at samle op på ideerne i plenum, hvor eleverne både får anledning til at argumentere for deres egne forslag samt lytte til og forstå deres klassekammeraters. Denne del er både vigtig i forhold til undersøgende arbejde jf. KiDM-projektet, Brousseaus didaktiske situationer og for udviklingen af ræsonnementskompetencen. I casen kan det ses, at en gruppe forsøger sig med at dele figuren op, så den består af fire retvinklede trekanter med et kvadrat imellem (Bilag 2). Denne mulige vej kunne være interessant at lade eleverne følge, da det – når man arbejder med undersøgende matematik – er afgørende at afprøve de veje, der opstår, som en del af processen. Uanset om man på forhånd ved, at en strategi ikke vil føre til en løsning, skal man lade eleverne gøre sig disse erfaringer selv. Gennem afprøvning vil de nå frem til, at metoden ikke kan benyttes, og de må gå tilbage til oplægget, analysere det og finde andre mulige strategier og løsninger. Hvis en anden gruppe har fundet en anden strategi, kunne denne også præsenteres for klassen, hvorefter man kunne forsøge at arbejde i den retning. På denne måde kunne klassen i fællesskab arbejde sig frem mod løsningen af opgaven med praktikantens hjælp, ved at hun samler klassens pointer og lader dem arbejde videre derfra i mindre steps. Hver gang man i fællesskab har fået markeret de kritiske træk og fundet en retning at arbejde videre i, kan grupperne igen diskutere og afprøve indbyrdes, for derefter at argumentere for deres ideer i plenum. På denne måde kunne opgaven have haft betydelig større karakter af en undersøgende opgave, end det er tilfældet i casen, da "Åben og undersøgende matematik kræver, at man formulerer spørgsmål og hypoteser, at man ræsonnerer, argumenterer, drager konklusioner og fremlægger, diskuterer, forsvarer og forklarer disse" (Pind, 2015, s. 8).

Lærerens stilladsering er afgørende, hvis elevernes ræsonnementskompetence skal kunne udvikles gennem undersøgende arbejde (Larsen, 2019). Ræsonnementer opstår ikke af sig selv, men skal hjælpes på vej, blandt andet gennem brug af artefakter. Til løsning af denne opgave kunne man med fordel have udleveret forskellige farver til grupperne, da disse kunne være en del af stilladseringen, for at eleverne kunne have dannet sig et bedre overblik i arbejdet med opgaven. Ligeledes ville nogle elever givetvis kunne have draget fordel af at have karton og sakse til rådighed, til undersøgelse af de fire firkanters areal, ligesom en lamineret udgave af opgaven ville have givet eleverne mulighed for at tegne på den og viske ud igen og igen.

Ud over at lærerens stilladsering af opgaven har indflydelse på elevernes udvikling af ræsonnementskompetencen, har opsamlingsfasen også stor betydning (Hansen et al., u.å). I opsamlingsfasen eller fællesgørelsen skal lærerens fokus være på dialogen og argumentationen. Det er her, elevernes ræsonnementer kommer til udtryk, fordi de både skal argumentere for deres egen proces, men også følge andres ræsonnementer. Læreren kan her få et indblik i, om elevernes argumentation bygger på en instrumentel eller en relationel forståelse. Et dilemma i forbindelse med opsamlingsfasen i en skoleklasse kan være, at alle eleverne ikke kommer til orde. Som lærer kan man løse dette problem ved, at grupperne hver har en repræsentant, som forelægger de løsninger, som alle i gruppen har bidraget til. Læreren kan på forhånd tilrettelægge opsamlingen, så pointerne i den undersøgende aktivitet kommer i en bestemt rækkefølge (Hansen et al., u.å). Denne måde kan bidrage til, at eleverne får øje for, at man i fællesskab kan komme rigtigt langt. Dog er det vigtigt at have in mente, at hvis elevernes løsningsstrategier står centralt i opsamlingsfasen, kan eleverne potentielt føle et pres for at have en korrekt løsning (Hansen et al., u.å). Derfor er det lærerens vigtigste opgave at have en åben tilgang og behandle elevernes løsninger respektfuldt og anerkendende. Dette gælder også, selvom elevernes løsninger ikke altid er helt gennemskuelige eller logiske. Læreren kan forberede opsamlingsfasen undervejs i aktivitetsfasen, hvor hun har mulighed for at spørge ind til elevernes løsningsforslag.

Som tidligere nævnt stiller opgaver i sig selv ikke høje eller lave kognitive krav til eleverne, og på samme måde er opgaver ikke i sig selv undersøgende. Selvom en opgave kan lægge op til undersøgende aktivitet, er det måden, hvorpå læreren stilladserer processen, der er afgørende. Opgaven i casens del 2 kan umiddelbart i sin udformning have karakter af en undersøgende opgave, men i praksis er der ikke megen undersøgende aktivitet, hvilket kommer til udtryk i elevernes manglende evne til at komme på løsningsstrategier. Opgaven kunne måske i en anden klasse have fungeret, på trods af den manglende stilladsering, da de sociomatematiske normer og den didaktiske kontrakt er afgørende for, hvordan elever går til en opgave (Skott et al., 2008). Fordi den didaktiske kontrakt er implicit, er det svært for praktikanten at vide, hvordan eleverne vil modtage en opgave af denne slags. Praktikanten har en forventning om, at arbejdet i matematikundervisningen indebærer selvstændig aktivitet, hvor eleverne i grupper prøver forskellige ideer af, diskuterer og bruger matematiske ræsonnementer. Det lader til, at de sociomatematiske normer i klassen ikke stemmer overens med praktikantens forventninger, og at eleverne ikke var vant til at arbejde på denne måde. De kan derimod være af den opfattelse, at det er læreren, der skal forære dem metoder, som de så kan benytte til at løse opgaverne.

I Brousseaus definitioner af faserne i elevernes arbejde bør aktionsfasen være af a-didaktisk karakter, hvorfor læreren ikke bør blande sig nævneværdigt (Skott et al., 2008). Samtidig kalder en opgave af denne slags på stilladsering, hvorfor der kan argumenteres for, at læreren bør spille en central rolle i denne aktions- eller aktivitetsfase. Ud fra Hansen & Hansens (2013) beskrivelser af forskellige typer af undersøgende opgaver definerer vi opgaven i casens del 2 som en guidet undersøgelse. I denne type opgave har eleverne en stor grad af frihed i designet af deres læreproces. Dog må læreren ikke være passiv, hun skal derimod indtage en vejledende og faciliterende rolle. Hermed kan læreren stille spørgsmål og, med udgangspunkt i de løsningsmuligheder eleverne kommer frem til, guide dem i retning mod enten en verificering eller falsificering af deres hypoteser (Hansen & Hansen, 2013).

Et tydeligt tegn, på at eleverne i casen oplever et behov for stilladsering, er, at de henvender sig til praktikanten og søger hjælp til at komme videre. Praktikanten kan være af den overbevisning, at eleverne ikke skal have for megen hjælp, da frustration er en del af læreprocessen. Stilladseringsfunktionen frustrationskontrol går ud på at hjælpe eleverne med at bibeholde deres tiltro til egne evner, når en opgave bliver svær (Gissel, 2020). Elever kan opleve øjeblikke af frustration, og i disse særligt krævende situationer må læreren gennem eksempelvis verbal opmuntring eller konkret vejledning hjælpe eleverne til at fastholde de positive elementer (Brodersen & Gissel, 2015). I stedet for at undlade at give mere hjælp, end det er tilfældet i casen, kunne praktikanten have undersøgt, hvor gruppens stillads skulle placeres, for at møde dem i deres nærmeste udviklingszone. Undersøgelsesbaseret undervisning kan skabe kognitive konflikter, som kan være vigtige og produktive, når eleverne skal udvikle ræsonnementskompetence, og de kognitive konflikter, der kan opstå i arbejdet med undersøgende undervisning, er netop det, der kan give anledning til en udvikling i elevernes ræsonnerende virksomhed (Larsen, 2019). Gennem en nysgerrig tilgang ville praktikanten kunne få indsigt i elevernes tankemønstre og ideer og på den måde guide dem videre gennem markering af kritiske træk. Der kan argumenteres for, at eleverne i højere grad ville kunne overkomme tvivl og frustrationer, hvis de blev klar over, hvilke elementer det ville være oplagt at arbejde videre med, og praktikanten ville dermed ikke skulle gå på kompromis med sig eget ideal om, at frustration skal til, for at skabe læring. Relationel matematik handler om at opbygge en konceptuel struktur, det vil sige et slags kognitivt skema. Når man får opbygget et mangfoldigt skema, bliver man mere sikker på sin evne til at løse en opgave selvstændigt, og man får øje på nye veje, der kan udvide ens skema (Skemp, 2006). Ifølge Larsen (2019) er der en fordel i at fastholde eleverne i den konfliktuelle proces, der kan opstå, da frustration kan bruges som udgangspunkt for undersøgelse. Det tager tid at løse kognitive konflikter, hvorfor eleverne må afsøge forskellige metoder, mulige løsninger og forståelser, for at udvikle deres ræsonnementer (Larsen, 2019).

Et argument for at undervise med udgangspunkt i den instrumentelle tilgang er, at det for eleverne er lettere at mestre matematikken under disse forudsætninger. At kunne huske og aktivisere en huskeregel er både kognitivt lettere tilgængeligt, giver en umiddelbar belønning i form af et korrekt resultat og er en hurtig metode til løsning af en opgave (Skemp, 2006). Desuden kan det give god mening at træne eleverne i færdigheder og effektivisering af disse, da de som bekendt til afgangsprøven i høj grad bliver testet i denne forståelse. Backwash-effekten har stor betydning for, hvad der kan give mening for lærere og elever at arbejde med: ”The way pupils work cannot but be influenced by the goal for which they are working, which is to answer correctly a sufficient number of questions” (Skemp, 2006, s. 93). For mange elever er det vigtigste at opnå et godt resultat, og undervisningen bliver derefter. Dette understøttes af analysen af Kolorit 8, hvor vi ser en overvægt af opgaver, der stiller lave kognitive krav til eleverne. Det er dog relevant at diskutere, om det at nå frem til en løsning ikke netop kan forudsætte en relationel forståelse. Hvis målet er at svare rigtigt på en masse spørgsmål i en test eller til afgangsprøven, kan der argumenteres for, at en relationel forståelse er nødvendig, for hurtigt at kunne vurdere eller verificere sine resultater.

Der er flere grunde til, at det kan være en svær opgave at tilrettelægge og gennemføre undervisning, der understøtter arbejdet med, og udviklingen af, elevers ræsonnementskompetence. Mange af de læremidler, der bruges i de danske folkeskoler, lægger ikke op til at arbejde med ræsonnementer i særlig høj grad (Larsen, 2019). I en undersøgelse af matematiksystemers kompetencedækning (Gissel et al., 2019) fandt man, at Kolorit til mellemtrinnet havde lav dækningsgrad på den eksplicitte ræsonnementskompetence, hvilket vil sige, at det i lærervejledningen nævnes, at man i et givent kapitel arbejder med kompetencen, men at det ikke er ekspliciteret, hvor eller hvordan eleverne kommer til at arbejde med ræsonnementskompetencen. Dette stemmer overens med vores analyse af Kolorit 8’s lærervejledning. Det bliver derfor i højere grad lærerens ansvar at redidaktisere eller stilladsere opgaverne på en måde, så kompetencen kommer i spil, hvilket besværliggøres af, at mange lærere ikke ved, hvordan de skal undervise i udvikling af ræsonnementskompetencen (Larsen, 2019). Mange lærere kan have en tendens til at undervise instrumentelt i ræsonnementer, og at ændre dette, vil indbefatte en ændring i hele den didaktiske kontrakt. Selv hvis man beslutter sig for at ændre undervisningspraksis fra instrumentel til relationel, kan det blive svært at implementere: “If pupils can get the right answers by the kind of thinking they are used to, they will not take kindly to suggestions that they should try for something beyond this” (Skemp, 2006, s. 90). Man får derfor behov for at lave ændringer i de opgaver, man stiller eleverne, da de er nødt til at få opgaver, som ikke kan løses ved brug af kendte regler eller formler. Her er det oplagt at bringe undersøgende aktiviteter i spil. I undersøgende matematik vil den didaktiske kontrakt indebære, at eleverne skal dele deres metoder og fremgangsmåder. Der bliver et markant større fokus på dialog i og om matematik, og de skal samtidig kunne sætte sig ind i og forstå andres løsninger (jf. udvikling af ræsonnementskompetencen). Når man arbejder undersøgende med et sigte om at udvikle ræsonnementer, overdrages meget af ansvaret til eleverne, hvilket for nogle elever kan føles utrygt (Hansen et al., u.å.), ligesom det for læreren kan være svært at praktisere. Det kan muligvis være det, der er på spil i casen, i både del 1 og 2, hvor eleverne ender med at give op, da opgaven bliver for svær, og praktikanten overtager læreprocessen, idet hun giver dem svaret. For mange lærere bliver et forsøg på undervisning med fokus på ræsonnementskompetencen i højere grad præget af udenadslære af eksempelvis beviser, og eleverne får dermed ikke mulighed for at udvikle deres forståelse for matematiske koncepter: ”... teachers' current teaching in reasoning and proof does not allow students to develop understandings of reasoning, because they do not facilitate the students' understanding of the contents in question” (Larsen, 2019, s. 38).

Som matematiklærere er det relevant at vide, hvordan man med små ændringer hurtigt og nemt kan højne kravene i opgaverne fra et læremiddel, så man har mulighed for at sætte sit eget præg på undervisningen. Med udgangspunkt i opgave 1 fra side 23 i Kolorit 8 er det oplagt at ændre opgaven ved at tilføje 'De to punkter, A og B, forestiller to deltagere set oppefra. Lav en skitse af situationen, og vis ***mindst tre steder***, hvor pinden kan være placeret'. Her ville den først antaget placering, midtpunktet mellem A og B, stadig være et gyldigt svar, men med tilføjelsen kræver det, at eleverne også finder midtnormalen på linjestykket mellem A og B. Dermed bliver der i opgaven stillet krav til, at eleverne udvikler “... bedre forståelser af matematiske begreber...” (Skott et al., 2018, s. 229). Læreren kan i undervisningen spørge ind til, hvordan eleverne er kommet frem til deres løsninger og forsøge at give dem en forståelse for midtnormaler generelt og ikke blot den enkelte opgave, de skal løse. Et andet eksempel kunne være, at man gjorde opgaverne til typen *Svaret er givet*, hvor fokus bliver på elevernes ræsonnementer. Opgaven i casen kunne ændres til: 'Hvorfor bliver arealet 4 gange så stort, når siderne i trekanter fordobles?'. Her må eleverne altså kunne argumentere for holdbarheden af påstanden (Niss & Jensen, 2002). Dog er en relevant overvejelse hertil, at en ændring i opgaverne ikke sikrer, at eleverne arbejder med det ønskede. Dette ses også i casen, hvor formålet ikke stemmer overens med det faktiske. Det hele afhænger af lærerens stilladsering i klasserummet samt hvilke sociomatematiske normer, der er i klassen.

I aktivitetsfasen vil læreren i flere typer af undersøgende opgaver træde ud af den rolle som mange har i en traditionel undervisning, hvor læreren er den formidlende og styrende part.

Det er nu eleverne, der inden for den ramme, der er givet, skal finde frem til et tilfredsstillende resultat. En måde, læreren kan stilladsere eleverne undervejs i aktivitetsfasen, er ved at gøre eleverne opmærksomme med spørgsmål som 'Hvad er målet?', 'Hvor skal/kan du gå hen' og 'Hvordan kommer du derhen?'. Med disse spørgsmål lægges der fokus på, at eleverne ved, hvad de skal, hvilke muligheder de har, og hvordan de kommer videre i deres proces (Hansen et al., u.å.). Disse spørgsmål kan også være med til at åbne elevernes arbejdsproces, så læreren ikke blot stiller lukkede spørgsmål, hvor elevernes svar ofte vil være på et lavt kognitivt niveau, da lukkede spørgsmål ikke giver særlig meget rum for refleksion. I stedet vil spørgsmålene lede dem på vej mod et gyldig svar til den pågældende opgave. Denne måde at arbejde på kræver meget træning for både eleverne og læreren, men kan potentielt ende med at have den positive konsekvens, at den undersøgende tilgang til matematik med tiden bliver den sociomatematiske norm i den pågældende klasse.

Konklusion

I denne opgave har vi fundet, at der i læremidlet Kolorit 8 er en overvægt af opgaver, der stiller lave kognitive krav til eleverne. Selvom vi som kommende folkeskolelærere ikke nødvendigvis skal benytte dette bogsystem, finder vi det relevant at være opmærksomme på, hvordan man med få greb, kan tilpasse opgaverne, så eleverne i højere grad kommer til at arbejde med ræsonnementskompetencen. Andre læremidler kan muligvis i højere grad lægge op til kompetenceudvikling, men skulle vi undersøge dette, ville det kræve yderligere dataindsamling og bearbejdning. En undersøgelse af denne slags ville være en oplagt udbygning af opgaven med et sigte på at klarlægge og begrunde valget af læremidler på vores kommende arbejdsplads og på folkeskoler generelt.

Når der ifølge Hansen & Hansen (2013) er en sammenhæng mellem undersøgende matematikundervisning og udvikling af en relationel forståelse, og der ifølge Larsen (2019) kan ses en fordel i at arbejde undersøgende, med sigte på at udvikle ræsonnementskompetence, må arbejdet mod en relationel forståelse være af høj prioritet, når man ønsker at styrke elevers ræsonnerende virksomhed. Med en solid, grundlæggende matematikforståelse, der både bygger på instrumentelle og relationelle elementer, vil man kunne bruge sin udenadslære hentet direkte fra hukommelsen, sammen med refleksioner omkring sammenhænge og mulige strategier. Sammen med en undersøgende praksis, hvor man lærer at diskutere, argumentere og validere, kan dette bidrage til et bedre potentiale for opbyggelsen af en god ræsonnementskompetence.

Samtidig må man ikke underkende den påvirkning backwash-effekten har, på den måde den danske folkeskole er struktureret på. Det er svært at bryde den sammenhæng der er mellem det, der undervises i, og den måde, eleverne testes på. Derfor er udvikling af både den relationelle forståelse og den instrumentelle forståelse for matematik vigtig at arbejde med. Når vi alligevel har valgt at have et særligt fokus på ræsonnementer og relationel forståelse i denne opgave skyldes det, at det generelt er den instrumentelle forståelse, der er repræsenteret i folkeskolen, som beskrevet af Skemp (2006) og som vi også har vist i vores analyse af Kolorit 8. Den instrumentelle forståelse er en forudsætning for at arbejde mod en relationel forståelse og et argument for at arbejde med elevers relationelle forståelse er, at selvom opbygningen af denne type forståelse er mere tids- og mentalt krævende, vil det lærte lejres i hukommelsen i højere grad end udenadslære.

Som det ses i casen, er det ikke nok at lade eleverne arbejde med opgaver, som på papiret er undersøgende eller giver anledning til en udvikling i ræsonnementskompetencen. Lærerens stilladsering er altafgørende for det læringsudbytte eleverne får ud af arbejdet og det er derfor en af lærerens vigtigste opgaver at kunne identificere, hvori elevens behov for støtte ligger samt at kunne tilbyde en passende stilladsering. Dette kan blandt andet gøres gennem brug af stilladseringsfunktionerne markering af kritiske træk, frustrationskontrol og reducering af frihedsgrader. Man må samtidig være opmærksom på hvordan eleverne tidligere har arbejdet i matematikundervisningen, da dette kan have betydning for både de sociomatematiske normer i klassen, klasserummets matematiske praksisser og den didaktiske kontrakt. Hvis eleverne primært har arbejdet med matematikken, som noget der har et rigtigt facit og en ny lærer ønsker at praktisere en mere undersøgende undervisning med henblik på at arbejde ræsonnerende, kan der opstå mange brud på den didaktiske kontrakt. Det er en langsommelig proces at ændre de sociomatematiske normer, både socialt i klassen, men også hos den enkelte elev, men kan det lykkes, vil mange flere folkeskoleelever få mulighed for at udvikle deres ræsonnementskompetence.

Litteraturliste

Aagerup, L. & Willaa, K. (2016). *Lærerens undersøgelsesmetoder*. Hans Reitzels.

Beck, S., Kaspersen, P. & Paulsen, M., (2014). Kapitel 14: Lev Vygotsky - Læring gennem tilegnelse. I: S. Beek, P. Kaspersen & M. Paulsen, *Klassisk og moderne læringsteori* (s. 319-351). Hans Reitzels.

Brodersen, P. & Gissel, S. T. (2015). Elevens forudsætninger og lærerens differentiering af undervisningen. I: P. F. Laursen, S. T. Gissel, P. Brodersen, K. Agergaard & N. G. Nielsen, *Effektiv undervisning* (3. udg. s. 191-213). Hans Reitzels Forlag.

Børne- og Undervisningsministeriet, (2019). *Matematik Fælles Mål 2019.*

Børne- og Undervisningsministeriet (2022). *Folkeskolens formål* https://www.uvm.dk/folkeskolen/folkeskolens-maal-love-og-regler/om-folkeskolen-og-folkeskolens-formaal/folkeskolens-formaal

Gissel, S. T. (2020). Stilladsering. I: P. Brodersen, *Didaktisk opslagsbog* (s. 269-273). Hans Reitzels.

Gissel, S. T., Hjelmborg, M., Kristensen, B. T. & Larsen, D. M. (2019). Kompetencedækning i analoge matematiksystemer til mellemtrinnet. *MONA*, (3), s. 7-27.

Hansen, N. J., Vejbæk, L., Lindhardt, B. et al. (u.å.). *Matematikdidaktiske tanker - mod en mere undersøgende dialogisk anvendelsesorienteret matematik.* http://kidm.dk/matematik/laerer/matematik-laerer/oversigt/fagdidaktik/matematikdidaktiske-tanker/

Hansen, R. & Hansen, P. (2013). Undersøgelsesbaseret matematikundervisning. *MONA,* (4), s. 36-54.

Hansen, J. T. & Nielsen, K. (1999). Stilladser og læring: et forsøg på afklaring. I: Hansen, J. T., Alrø, H., Rasmussen, J., Nielsen, K., Hedegaard, M., Raahauge, J., Jantzen, C., Skovmose, O. & Klausen, T., *Stilladsering – en pædagogisk metafor* (s. 9-37). Klim.

Kaas, T. & Kristiansen, H. (2012). *Kolorit 8: Matematik: Lærerens bog*. Gyldendal.

Kaas, T. & Kristiansen, H. (2016). *Kolorit 8: Matematik: Grundbog*. Gyldendal.

Larsen, D. M. (2019). *Developing reasoning competence in inquiry-based mathematics teaching*. [Ph.D. thesis, SDU]. Syddansk Universitet. Det Naturvidenskabelige Fakultet. https://www.ucviden.dk/ws/portalfiles/portal/124310765/phd._Dorte_Moesk_r_Larsen.pdf

Larsen, D. M. & Lindhardt, B. (2019). Undersøgende aktiviteter og ræsonnementer i matematikundervisningen på mellemtrinnet. *MONA*, (1), s. 7-21.

Lindén, N. (1997). Det støttende stillads. I N. Lindén, *Stilladser om børns læring* (s. 51-69). Klim.

Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). Kompetencer og matematiklæring: Idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark (Vol. 18). Undervisningsministeriet.

Pind, P. (2015). *Åben og undersøgende matematik* (1. Udg.). Forlaget Pind og Bjerre.

Rasmussen, J., Rasch-Christensen, A., Molbæk, M., Kristensen, R. M., Reimer, D. & Smith, E. (2019). *Undervisning med Fælles Mål i dansk og matematik Et overvejende kvalitativt mixed methods-studie (2. runde).* DPU, Aarhus Universitet og VIA University College.

https://emu.dk/sites/default/files/2019-09/Rapport%20-%20Undervisning%20med%20F%C3%A6lles%20M%C3%A5l%20i%20dansk%20og%20matematik.PDF

Skemp, R. R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School, vol. 12*(2), 88-95.

Skott, J., Jess, K. & Hansen, H. C. (2008). 11 Brousseau og teorien om didaktiske situationer. I: J. Skott, K. Jess & H. C. Hansen, *Matematik for lærerstuderende: Delta: Fagdidaktik* (s. 417-446). Samfundslitteratur.

Skott, J., Skott, C., Jess, K. & Hansen, C. (2018). *Delta 2.0: Fagdidaktik 1.-10. klasse* (2. udg). Samfundslitteratur.

Undervisningsministeriet (2002) *Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*

Vygotsky, L. S. (1982). Spørgsmålet om undervisning og den intellektuelle udvikling i skolealderen. I L. S. Vygotsky, *Om barnets psykiske udvikling: en artikelsamling* (s. 105-124). Nyt Nordisk.

Vygotsky, L. S. (2006). Forholdet mellem læring og udvikling. I C. Madsen (Red.), *Konstruktivistiske rødder og grene: en antologi* (s. 61-75). Unge Pædagoger.

Bilag 1 - Læremiddel optælling

Side, opgave nr.	Kognitivt niveau	Begrundelse fra Skott et al (2018) og evt. uddybning
18, 1	1a	"Er entydige – det drejer sig om præcis reproduktion af tidligere lært materiale, og det, der skal reproduceres, er klart og tydeligt"
18, 2	1a	"Drejer sig om at (…) lære at huske dem". Eleverne skal huske at der er lige langt fra deres punkter til hver af enderne af linjestykket.
19, 3	1a	"Er entydige – det drejer sig om præcis reproduktion af tidligere lært materiale, og det, der skal reproduceres, er klart og tydeligt"
20, 1	1a	"Er entydige – det drejer sig om præcis reproduktion af tidligere lært materiale, og det, der skal reproduceres, er klart og tydeligt"
20, 2	2a	"Fokuserer på at udvikle bedre forståelser af matematiske begreber". Eleven finder andre egenskaber ved midtpunktstransversalen, for at udvide forståelsen for dette begreb.
20, 3	2a	"Fokuserer på at udvikle bedre forståelser af matematiske begreber". Eleven finder andre egenskaber ved midtpunktstransversalen, for at udvide forståelsen for dette begreb.
20, 4	2a	"Fokuserer på at udvikle bedre forståelser af matematiske begreber". Eleven finder andre egenskaber ved midtpunktstransversalen, for at udvide forståelsen for dette begreb.
20, 5	2a	"Fokuserer på at udvikle bedre forståelser af matematiske begreber". Eleven samler de egenskaber ved midtpunktstransversalen som eleven har fundet i de andre opgaver.
21, 1	1a	"Er entydige – det drejer sig om præcis reproduktion af tidligere lært materiale, og det, der skal reproduceres, er klart og tydeligt"
21, 2	1a	"Reproducere tidligere lærte fakta, regler, formler eller definitioner eller om at lære at huske dem". Eleven bruger sin viden omkring geometriske figurer.
21, 3	1b	"Er fokuserede på at producere det korrekte svar snarere end at udvikle matematisk forståelse". Eleven er ikke i gang med at udvide forståelse for et begreb.
21, 4	1a	"Er entydige – det drejer sig om præcis reproduktion af tidligere lært materiale, og det, der skal reproduceres, er klart og tydeligt". Eleven har lige skulle undersøge netop disse spørgsmål i de overstående opgaver.
22, 1	2a	"Eleverne må forsøge at forstå det begrebslige indhold i proceduren for at kunne klare udfordringen i oplægget". Eleven skal selv finde frem til den procedure der skal bruges til at løse opgaven.
22, 2	2a	"Fokuserer på at udvikle bedre forståelser af matematiske begreber". Eleven arbejder med at udvide forståelsen for begrebet midtnormalen.
22, 3	2a	"Fokuserer på at udvikle bedre forståelser af matematiske begreber". Eleven arbejder med at udvide forståelsen for begrebet midtnormalen.

22, 4	1a	"Drejer sig om at reproducere tidligere lærte fakta, regler, formler eller definitioner eller om at lære at huske dem". Eleven skal gengive hvad de lige har lært i opgaverne forinden.
23, 1	1a	"Drejer sig om at reproducere tidligere lærte fakta, regler, formler eller definitioner eller om at lære at huske dem". Eleven skal finde midten mellem to punkter.
23, 2	2a	"Eleverne må forsøge at forstå det begrebslige indhold i proceduren for at kunne klare udfordringen i oplægget". Eleven skal selv finde frem til den procedurer som skal bruges til at regne opgaven.
23, 3	2a	"Fokuserer på at udvikle bedre forståelser af matematiske begreber". Eleven arbejder med at udvide forståelsen for begrebet midtnormal.
23, 4	2a	"Fokuserer på at udvikle bedre forståelser af matematiske begreber". Eleven arbejder med at udvide forståelsen for begrebet midtnormal.
24, 1	1a	"Er entydige – det drejer sig om præcis reproduktion af tidligere lært materiale, og det, der skal reproduceres, er klart og tydeligt". Eleven skal følge instruktionerne i opgaven.
24, 2	1b	"Er fokuserede på at producere det korrekte svar snarere end at udvikle matematisk forståelse".
24, 3	1b	"Er fokuserede på at producere det korrekte svar snarere end at udvikle matematisk forståelse". Eleven leder efter et ja eller nej.
24, 4	2a	"Fokuserer på at udvikle bedre forståelser af matematiske begreber". Eleven arbejder med at udvide forståelsen for begrebet median og areal.
24, 5	1a	"Er entydige – det drejer sig om præcis reproduktion af tidligere lært materiale, og det, der skal reproduceres, er klart og tydeligt". Eleven skal følge instruktionerne i opgaven.
24, 6	1b	"Er algoritmiske i den forstand, at det specificeres eller er klart fra tidligere undervisning, hvilken procedure der skal benyttes". Eleven får angivet at de skal finde arealerne.
25, 1	1a	"Er entydige – det drejer sig om præcis reproduktion af tidligere lært materiale, og det, der skal reproduceres, er klart og tydeligt". Eleven skal følge instruktionerne i opgaven.
25, 2	1a	"Drejer sig om at reproducere tidligere lærte fakta, regler, formler eller definitioner eller om at lære at huske dem". Eleven skal kunne huske forskellige typer af trekanter.
25, 3	1a	"Drejer sig om at reproducere tidligere lærte fakta, regler, formler eller definitioner eller om at lære at huske dem". Eleven finder medianer ud fra deres viden omkring dem.
25, 4	1b	"Er algoritmiske i den forstand, at det specificeres eller er klart fra tidligere undervisning, hvilken procedure der skal benyttes". Eleven skal finde arealet af hver trekant.
26, 1	1a	"Er entydige – det drejer sig om præcis reproduktion af tidligere lært materiale, og det, der skal reproduceres, er klart og tydeligt". Eleven skal følge instruktionerne i opgaven.
26, 2	1a	"Drejer sig om at (…) lære at huske dem". Eleverne skal huske at vinkelhalveringslinjer halver en vinkel.

26, 3	1b	"Er fokuserede på at producere det korrekte svar snarere end at udvikle matematisk forståelse". Eleven leder efter et ja eller nej.
26, 4	1a	"Er entydige – det drejer sig om præcis reproduktion af tidligere lært materiale, og det, der skal reproduceres, er klart og tydeligt". Eleven skal følge instruktionerne i opgaven.
26, 5	1a	"Kan ikke løses vha. Procedurer, fordi der ikke findes en procedure,". Eleven må ikke bruge den kendte procedure.
26, 6	1b	"Er fokuserede på at producere det korrekte svar snarere end at udvikle matematisk forståelse". Eleven leder efter et ja eller nej
27, 1	1a	"Drejer sig om at reproducere tidligere lærte fakta, regler, formler eller definitioner eller om at lære at huske dem" Eleven ved hvad en trekant er.
27, 2	1b	"Er algoritmiske i den forstand, at det specificeres eller er klart fra tidligere undervisning, hvilken procedure der skal benyttes". Eleven har på forrige side arbejdet med proceduren.
27, 3	1b	"Kræver ingen forklaring fra eleverne, eller forklaringerne fokuserer udelukkende på den procedure, der skal bruges". Eleven skal forklare hvordan de lavede forrige opgave.
28, 1	2a	"Eleverne må forsøge at forstå det begrebslige indhold i proceduren for at kunne klare udfordringen i oplægget". Eleven skal selv finde frem til den procedurer som skal bruges til at regne opgaven.
28, 2	1b	"Er algoritmiske i den forstand, at det specificeres eller er klart fra tidligere undervisning, hvilken procedure der skal benyttes". Eleven har i forrige opgave fundet proceduren.
28, 3	1b	"Er algoritmiske i den forstand, at det specificeres eller er klart fra tidligere undervisning, hvilken procedure der skal benyttes".
28, 4	2a	"Eleverne må forsøge at forstå det begrebslige indhold i proceduren for at kunne klare udfordringen i oplægget". Eleven skal selv finde frem til den procedurer som skal bruges til at regne opgaven.
28, 5	1b	"Er algoritmiske i den forstand, at det specificeres eller er klart fra tidligere undervisning, hvilken procedure der skal benyttes". Eleven har i forrige opgave fundet proceduren.
28, 6	1b	"Er algoritmiske i den forstand, at det specificeres eller er klart fra tidligere undervisning, hvilken procedure der skal benyttes".
29, 7	1a	"Er entydige – det drejer sig om præcis reproduktion af tidligere lært materiale, og det, der skal reproduceres, er klart og tydeligt".
29, 8	1a	"Er entydige – det drejer sig om præcis reproduktion af tidligere lært materiale, og det, der skal reproduceres, er klart og tydeligt"
29, 9	2a	"Fokuserer på at udvikle bedre forståelser af matematiske begreber". Eleven arbejder med at udvide forståelsen for en trekants omskrevne cirkel og indskrevne cirkel.
29, 10	2b	"Kræver, at eleverne udforsker og forstår meningen med matematiske begreber, processer og relationer.
30, 1	1b	"Er algoritmiske i den forstand, at det specificeres eller er klart fra tidligere undervisning, hvilken procedure der skal benyttes".

30, 2	1a	“Er entydige – det drejer sig om præcis reproduktion af tidligere lært materiale, og det, der skal reproduceres, er klart og tydeligt”.
30, 3	1b	“Er algoritmiske i den forstand, at det specificeres eller er klart fra tidligere undervisning, hvilken procedure der skal benyttes”.
30, 4	1a	“Drejer sig om at reproducere tidligere lærte fakta, regler, formler eller definitioner eller om at lære at huske dem”. Eleven har lært hvor meget af figurerne der er farvet tidligere i emnet.
31, 5	1b	“Er algoritmiske i den forstand, at det specificeres eller er klart fra tidligere undervisning, hvilken procedure der skal benyttes”.
31, 6	1b	“Er algoritmiske i den forstand, at det specificeres eller er klart fra tidligere undervisning, hvilken procedure der skal benyttes”.
31, 7	1b	“Er algoritmiske i den forstand, at det specificeres eller er klart fra tidligere undervisning, hvilken procedure der skal benyttes”.
31, 8	1b	“Er algoritmiske i den forstand, at det specificeres eller er klart fra tidligere undervisning, hvilken procedure der skal benyttes”.

Kognitivt niveau	**Antal opgaver**	**≈ Procent**
1a – Hukommelsesoplæg	23	40%
1b – Procedurer uden forbindelser	19	33%
2a – Procedurer med forbindelser	14	25%
2b – Oplæg med matematisk tænkning	1	2%
Sum	57	100%

Bilag 2 - Elevløsning af opgave

Dette er en reproduktion af en gruppes forsøg på løsning på opgaven fra casens 2. del