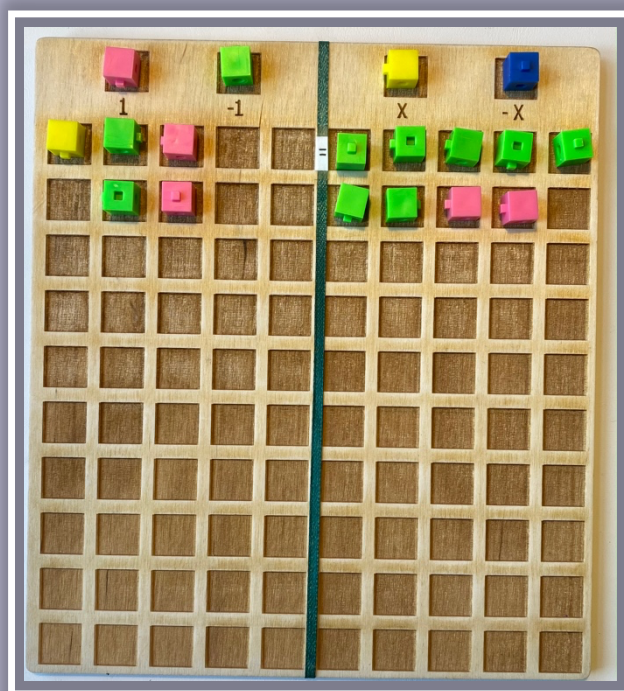


Repræsentationer i matematik med inspiration fra Singapore

Bachelorprojekt

Julie Klausholt og Line Sandholm
VIA Læreruddannelsen i Aarhus



Figur 1: Ligningsbrættet - et materiale vi har fremstillet

Hold: MA19

Vejledere: Adrian Bull og Mikkel Wiskerchen

Afleveringsdato: 10. maj 2023 kl. 12.00

Antal tegn: 90.892

Indholdsfortegnelse

Indledning	4
Problemformulering	5
Læsevejledning	5
Metode	7
<i>Videnskabsteoretisk afsæt</i>	7
<i>Diskursanalyse</i>	8
<i>Observation</i>	8
<i>Interview</i>	9
Behandling af interviews	10
Teori	10
<i>Singapore-matematik</i>	11
<i>Jerome S. Bruners repræsentationsformer</i>	11
<i>Konkrete materialer med inddragelse af forskning</i>	13
<i>Forståelse i matematik fra Richard Skemp's perspektiv</i>	14
<i>Dunn og Dunns syn på læringsstile</i>	15
Analyse	16
<i>Diskursanalyse af et kapitel fra en matematikbog</i>	16
Tekst	17
Diskursiv praksis	17
Social praksis.....	18
<i>Analyse af Ligningsbrættet ud fra en designprocesmodel</i>	19
<i>Udvikling af materiale gennem designproces</i>	19
Designudfordring	19
Undersøgelse	20
Idéudvikling	21
Konstruktion	22
Argumentation	23
Refleksion	24
<i>Beskrivelse af Ligningsbrættet</i>	26
<i>Analyse af indsamlet empiri fra folkeskole</i>	27
Elevernes forståelse af Ligningsbrættet	27
Elevernes anvendelse af Ligningsbrættet	28
Den konkrete repræsentation sammenlignet med andre repræsentationsformer	30
Ligningsbrættes betydning for lavt- og højt-præsterende elever	31

Undervisningsformen ved anvendelse af Ligningsbrættet	31
Organiseringen af undervisningen med brug af Ligningsbrættet	32
Diskussion	34
<i>To typer konkrete materialer.....</i>	<i>34</i>
<i>Arbejdsformen i introduktionen til Ligningsbrættet</i>	<i>35</i>
<i>Kvaliteten af den indsamlede empiri</i>	<i>36</i>
Konklusion og handleperspektiver	38
Perspektivering	40
Litteraturliste	41
Bilag	44
<i>Bilag 1: Indholdsfortegnelse af kapitel i T-MAT i fjerde: FÆLLESBOG</i>	<i>44</i>
<i>Bilag 2: Fordeling af opgaver på baggrund af repræsentationsformer.....</i>	<i>44</i>
<i>Bilag 3: Konkret opgave fra T-MAT i fjerde: FÆLLESBOG</i>	<i>44</i>
<i>Bilag 4: Undersøgelse af materialer fra CFU</i>	<i>45</i>
<i>Bilag 5: Observationer fra 7.X og 7.Y.....</i>	<i>45</i>
Bilag 5.1: Observationer fra 7.Y	45
Bilag 5.2: Observationer fra 7.X.....	46
<i>Bilag 6: Kodning af gruppeinterview med de 4 elever fra 7.X og 7.Y.....</i>	<i>47</i>
Bilag 6.1: Kodning efter forståelse.....	47
Bilag 6.2: Kodning efter anvendelse af materiale	48
Bilag 6.3: Kodning efter repræsentationer	50
<i>Bilag 7: Kodning af lærerinterview</i>	<i>51</i>
Bilag 7.1: Kodning efter stilladsering af Ligningsbrættet.....	51
Bilag 7.2: Kodning efter lærernes holdning til materialet.....	52

Indledning

I 1990'erne og start 2000'erne skete der en ændring i det danske menneskesyn. Danmark gik fra at være en velfærdsstat til at være en konkurrencestat (Pedersen, 2011, s. 171). Det betød, at skolens primære opgave gik fra at danne den enkelte borger til demokrati, til at have fokus på at udvikle det enkelte individs kompetencer og færdigheder (Pedersen, 2011, s. 172). Det danske samfund udviklede sig i 1900-tallet fra at være et landbrugssamfund, til et service- og videnssamfund (Munkøe, 2018). For at være et af de bedste videnssamfund og fastholde den placering, kræver det, at vi har uddannelser i verdensklasse (Undervisningsministeriet, 2007). Derfor er det interessant at kunne sammenligne sig med andre lande. For hvordan er de danske unge forberedt til at møde udfordringerne, som opstår i et informationsamfund, sammenlignet med andre lande? PISA-undersøgelser, der undersøger fagspecifikke færdigheder, har gjort, at man nu sammenligner Danmark med lande over hele verden (Egelund, 2011). Resultaterne viser, at Danmark ikke er blandt de højest rangerende lande. Dette er problematisk, eftersom folkeskolen har til opgave at forberede eleverne til deltagelse, ansvar og pligter i det danske samfund (Børne- og undervisningsministeriet, 2022). PISA-undersøgelserne i 2015 påpeger, at næsten 14 % af de danske elever på 9. klassetrin er så dårlige til matematik, at det har risiko for at få alvorlig betydning for deres senere liv og karriere (Sjøgren, 2018). Undersøgelserne viser også, at Singapore gennem flere år har været det land, der klarer sig bedst inden for matematik (Bull & Blankholm, 2023, s. 1). Men hvordan er deres undervisning anderledes, fra det vi kender til i Danmark?

Singapore-matematik tager udgangspunkt i de førende forskeres anbefalinger indenfor matematik (Sjøgren, 2018). De anvender blandt andet et fokus på forskellige repræsentationsformer i undervisningen, herunder konkrete materialer. Konkrete materialer er heller ikke nyt i en dansk kontekst, her bruger vi eksempelvis flittigt centicubes. Det er især i de mindre klasser, hvor de konkrete materialer spiller en central rolle i undervisningen (Hansen, 2019, s. 194-195). I løbet af vores praktikker har det undret os, hvorfor de konkrete materialer ikke fortsætter med at være en central del af undervisningen gennem hele skoleforløbet. Forskning viser, at brugen af konkrete materialer kan være med til at understøtte elevernes forståelse (Bull & Blankholm, 2023). Vi har også erfaret, at der ikke findes så mange konkrete materialer til udskolingen, eller at det i hvert fald ikke er let tilgængeligt som lærer. Derfor har det været udfordrende at planlægge undervisning, hvor de

konkrete materialer indgik. Det har specielt været svært inden for emnet algebra. Desuden er det et af de emner eleverne særligt har problemer med, hvilket blandt andet skyldes brugen af bogstaver og symboler. Derfor vil det være brugbart med et materiale inden for dette emne, som vi kan bruge, når vi kommer ud i praksis. Grunden til at det især er vigtigt at lære algebra er, at der er mange uddannelser som har elementer fra algebra (Pind, 2022, s. 17). Så hvis folkeskolen skal opfylde formålet om at klargøre elever til videre uddannelse (Børne- og undervisningsministeriet, 2022), kræver det at man arbejder med algebra på en måde, hvor eleverne oplever at de mestrer opgaverne (Pind, 2022, s. 7-9). På baggrund af denne nysgerrighed er vi kommet frem til følgende problemstilling:

Problemformulering

- Hvordan arbejder man med repræsentationer i Singapore-matematik, og hvilke kvaliteter fra dette kan anvendes i udviklingen af et konkret materiale til ligninger, målrettet til danske elever i udskolingen?

Læsevejledning

I det følgende vil vi beskrive, hvordan vi har valgt at opbygge opgaven for at besvare problemformuleringen bedst muligt. I den første del af opgaven vil det videnskabssteoretiske afsæt og de senere anvendte metoder være i fokus. Det skal give en forståelse af det undersøgelsesdesign, vi har udført. I projektet har vi arbejdet med flere forskellige metoder. Først en diskursanalyse med afsæt i en bog fra det nationale forskningsprojekt TRACK (Jóelsdóttir, Sunde, Pedersen, & Drejer, 2022). Diskursanalysen er valgt med det formål at give os et indblik i hvilke genretræk, der særligt kommer til udtryk i Singapore-matematik. Dernæst har vi observationer og interviews af to elevgrupper, der arbejder med det materiale, vi har udviklet. Hensigten med indsamlingen af empiri er at få indsigt i elevernes arbejde med materialet, hvilket skal danne grundlag for en del af analysen.

Opgaven afspejler både det angelsaksiske og det kontinentale projektsyn. I det følgende afsnit vil vores teoretiske afsæt beskrives, mens der i analysen indgår både ren analyse og et afsnit, der afspejler det kontinentale projektsyn. Det er et bevidst valg, da det bedst muligt afspejler vores proces i projektet. Her er vi gået mere systematisk og begrebsmæssigt til værks i diskursanalysen samt analysen af det empiriske materiale, mens vi i designprocesanalysen har valgt at inddrage teori undervejs. En designproces er en løbende proces, hvorfor det giver mening at inddrage teorien

løbende. Desuden bruges der det samme teorigrundlag i diskursanalysen og analysen af empiri fra folkeskolen, hvorfor det giver mening at have et teoriafsnit udelukkende til det.

I opgavens anden del beskrives de teoretiske positioner, hvorved begreberne repræsentationer, konkrete materialer og Singapore-matematik bliver konkretiseret. Den ene del af teorien er relateret til Singapore-matematik, herunder indgår Jerome Bruner og Richard Skemp. Teorierne skal være med til at belyse centrale dele i diskursanalysen og i analysen af empiri fra folkeskolen. Den anden del er relateret til læring og konkrete materialer, hvor der indgår international forskning på området samt forskellige læringsstile. Denne del bliver bragt i spil i analysen af den indsamlede empiri.

Yderligere bruges forskningen som grundsten i udviklingen af et konkrete materiale til ligninger.

Den tredje del af opgaven indeholder analysen i tre afsnit, der som nævnt i ovenstående både har et angelsaksisk og kontinentalt projektsyn. Første del vil være en diskursanalyse af et kapitel fra en bog i det nationale TRACK-forskningsprojekt. Analysen anskues ud fra Bruners tre repræsentationsformer, hvor det skal give os et indblik i, hvordan repræsentationerne fremtræder. Formålet med denne analyse er at besvare delen af problemformuleringen, om hvordan repræsentationsformer kommer til udtryk i materialet. Samtidig skal det give inspiration til udvikling af et konkret materiale. Andet afsnit vil være en analyse af vores designproces under udviklingen af et konkret materiale til ligninger. Designprocessen har bidraget til at udviklingen af materialet er forløbet mere kvalificeret. Slutteligt vil analysen med afsæt i de teoretiske positioner omhandle de empiriske fund fra observationer og interviews, hvor elever og lærere har anvendt det udviklede konkrete materiale. Denne analyse er med til at give et indblik i, hvordan materialet kan bruges i praksis samt hvilke nye tiltag, der er relevante at overveje, hvis materialet skal være brugbart i fremtidens undervisning.

Fjerde og sidste del af opgaven består af en diskussion, der er udarbejdet på baggrund af analysen. Den indeholder forskellige forståelser af et konkret materiale, arbejdsformen med Ligningsbrættet samt en diskussion af kvaliteten af den kvalitative metode. Derudover indeholder den en konklusion, hvor der indgår handleperspektiver. Her er det hensigten at opsamle og sammenfatte opgavens dele. Sidst men ikke mindst er der også et kort perspektiveringsafsnit, der giver et bud på, hvilke kvaliteter en designproces kan bidrage med til lærergerningen.

Metode

I det følgende afsnit beskrives metoderne, der anvendes for at besvare projektets problemformulering. Det præciseres, hvordan de valgte metoder udføres, og hvilken ny viden de kan bidrage med. Vi har valgt tre typer af metoder: diskursanalyse, observationer og interview. Når vi anvender observationer og interviews, er det i forbindelse med afprøvning af det materiale, vi har udviklet. Indledningsvis beskrives det, hvordan vores videnskabsteoretiske afsæt kommer til udtryk gennem processen.

Videnskabsteoretisk afsæt

Da vi i projektet ønsker at undersøge Singapore-matematik og anvendelsen af konkrete materialer, vil vi arbejde ud fra både en hermeneutisk og fænomenologisk tilgang. Hermeneutikken ses blandt andet indledningsvist, når vi har søgt ny viden om matematik, konkrete materialer og didaktikere fra Singapore-matematik. Denne viden er blevet til en ny forståelse, som bygger ovenpå den forforståelse, vi havde på forhånd. Ifølge den hermeneutiske tilgang vil de nye forståelser komme ud fra en kontinuerlig fortolkningsproces, hvor man fortolker gennem erfaringer og oplevelser. Over tid vil mennesket udvikle sin forståelseshorisont og opnå en mere nuanceret forståelse, dette ligger under begrebet hermeneutisk spiral (Sunesen, 2020, s. 23). Et eksempel på hvordan spiralen er i spil, kan ses under udviklingen af det konkrete materiale. Her startede vi med en forforståelse af ligninger og konkrete materialer, hvorfra forståelsen blev udvidet efter fortolkninger af handlemuligheder med materialet. Således var der flere fortolkningshop i processen, hvor man bevæger sig mellem de enkelte deles betydning til betydning for helheden (Sunesen, 2020, s. 26).

Den indsamlede empiriske data læner sig op ad en fænomenologisk tankegang. Fænomenologien er rettet mod menneskers egne oplevelser og erfaringer med verden, hvor man er optaget af den subjektive erfaringsverden (Sunesen, 2020, s. 21). Her vil vi undersøge, hvordan elever arbejder med Ligningsbrættet, et materiale vi har udviklet. Vores observationer vil ikke være fuldstændigt objektive, da vi forud for observationen har vores subjektive forståelse af verden (Sunesen, 2020, s. 21). I interviews med elever og lærere får vi deres subjektive erfaringer med materialet og ikke et generelt indblik. Kvaliteten ved dette er, at vi får oplevelser og erfaringer, der kan gøre os klogere på, hvordan materialet kan bruges i en skolekontekst.

Diskursanalyse

Diskursanalysen bliver udarbejdet på en fjerdeklases bog af TRACK-projektet (Jóelsdóttir, Sunde, Pedersen, & Drejer, 2022). Her tager vi udgangspunkt i kapitlet om ligninger, da det er det emne, vi arbejder ud fra. Ved at tage udgangspunkt i ét kapitel har vi mulighed for højere grad af fordybelse, i modsætning til hvis vi valgte hele bogen.

En diskursanalyse er en analyse, hvor man er interesseret i at finde frem til, hvordan samfundsmæssige og politiske diskurser har indvirkning på et givent materiale (Schmidt C. H., 2022). Det kan f.eks. være i en lærebog, hvor man finder sammenhænge i opgaver, emner og metoder.

Michael Foucault kalder det et magtperspektiv, som i nogle tilfælde bliver gjort til en selvfølgelighed, så der ikke længere sættes spørgsmålstejn ved det (Schmidt J. R., 2017, s. 75). Formålet med diskursanalysen er derfor at få et indblik i hvordan Singapore-matematik kommer til udtryk i en bog udviklet af TRACK-projektet (Jóelsdóttir, Sunde, Pedersen, & Drejer, 2022). Diskursanalysen tager udgangspunkt i Faircloughs kritiske diskursanalyse, som består af tre dimensioner; tekst, diskursiv praksis og social praksis. Tekst-dimensionen er selvsagt den valgte tekst, man analyserer den diskursive og sociale praksis ud fra (Schmidt J. R., 2017, s. 83). I den diskursive praksis undersøger man tekstens genre samt de diskurser, som kommer til udtryk i teksten. Den sidste dimension er den sociale praksis, hvor man ser på teksten i forhold til den samfundsmæssige kontekst, teksten er skrevet i (Schmidt J. R., 2017, s. 83).

Observation

For at undersøge vores problemstilling nærmere har vi desuden valgt at bruge observation og interview som metode. Observationerne og interviewene er udført på 2 forskellige grupper. Fælles for begge grupper er, at de består af 4 elever, hvor elevernes niveau er forskelligt; én højt-præsterende, to middel-præsterende og én lavt-præsterende. Elevernes forskellighed er med til at sikre repræsentativitet, så stikprøven så vidt muligt afspejler hele populationen af folkeskoleelever (Jakobsen, 2011, s. 13). Observation er når man undersøger, hvad en afgrænset gruppe foretager sig i et bestemt tidsrum (Østergaard, 2017). Formålet med observationerne er at få et indblik i elevernes arbejde, når de interagerer med Ligningsbrættet, samt hvordan eleverne taler sammen. Dette er styrken ved at observere, da metoden har fokus på praksis, og man får adgang til en gruppes hverdag.

Til sammenligning kan det være svært at få indsigt igennem andre metoder som spørgeskemaer og interviews (Østergaard, 2017, s. 31).

Observationerne er udført ad to omgange, én observation for hver gruppe. Observatøren har i denne sammenhæng en rolle som deltagende observatør. Det skyldes for det første, at uden kendskab til eleverne, vil vi ikke kunne indgå i som en naturlig del (Østergaard, 2017, s. 33). For det andet har vi muligheden for at hjælpe eleverne videre, hvis der er en opgave, de ikke forstår. Det er særligt relevant i denne situation, fordi vi har udviklet et materiale, som hverken deres almindelige lærer eller eleverne kender til på forhånd. Observationerne har en struktureret tilgang i og med, at vi på forhånd har udvalgt nogle fokuspunkter, som observatøren skal lægge mærke til. Fokuspunkterne tager udgangspunkt i tre overordnede emner: elevernes arbejde med materialet, den relationelle forståelse og samarbejdet eleverne imellem. Fokuspunkterne er lavet på baggrund af problemformuleringen og skal være med til at sikre at vi indsamler relevante data.

Ud over at observere eleverne har vi efterfølgende lavet et gruppeinterview med henblik på at få elevernes tanker tydeliggjort. Gennem en observation er det svært at vide, hvad eleverne tænker, og man får ikke indblik i, hvad eleverne synes om materialets relevans.

Interview

Efter at eleverne har arbejdet med materialet, hvor de bliver observeret, bliver der foretaget et fokusgruppeinterview. Når dette anvendes, skyldes det, at metoden kan være med til at belyse, hvad målgruppen til materialet tænker om mulighederne og begrænsningerne ved anvendelsen af materialet (Jakobsen, 2011, s. 7). I vores tilfælde anvendes den kollektive diskussion i slutningen af udviklingen af et nyt materiale. Herved kan den nye viden fra interviewet bidrage med større grundlæggende forståelse af emnet, afprøvning af hypoteser, afgørelse af idéens levedygtighed og mulighed for forbedringer (Jakobsen, 2011, s. 16). Samtalen styres ud fra en spørgeramme, hvor det første punkt er en introduktion. Her gøres det tydeligt, at eleverne ikke behøver at være enige om svarene til spørgsmålene, hvilket skal sikre deres ærlige mening og dermed styrke troværdigheden af undersøgelsen (Jakobsen, 2011). Efterfølgende spørges der ind til arbejdet med og holdningerne til materialet. Slutteligt vil der være en sidste runde afsluttende kommentar fra eleverne.

Når observationen og fokusgruppeinterviewet er gennemført, afholder vi et kort interview med læreren, som har været til stede under forløbet. Formålet med dette interview er todelt. For det første udføres det for at høre lærerens indtryk af eleverne arbejds måde sammenlignet med de daglige matematiktimer. For det andet er formålet at høre lærerens tanke om muligheder og begrænsninger i materialet, efter de har set eleverne anvende det. Interviewet vil foregå semistruktureret, hvor der kan stilles uddybende spørgsmål (Bak, 2017, s. 51).

Behandling af interviews

Alle interviews blev optaget ude på skolen, hvorefter de er blevet transskriberet. Efter transskriptionen har vi brugt kodning til at behandle indsamlet data. Kodning er en metode, som er god at bruge, når man skal administrere og organisere den data, man har indsamlet (Gibbs, 2007). Ved at lave en kodning af alle transskriberinger fremfor at udplukke data, får man større gennemsigtighed i disse data (Gibbs, 2007). Kodningen er lavet ud fra en datadrevet tilgang, hvilket betyder, at vi ikke havde en liste af koder forud for bearbejdningen (Gibbs, 2007). Formålet var i stedet at se, hvad der skete i indsamlet data, og danne temaer herfra. På den måde undgik vi påtvungne fortolkninger af, hvad allerede eksisterende teorier siger (Gibbs, 2007). Ydermere har vi lavet linje-for-linje kodning, der skal fremtvinge den analytiske tænkning. Det betyder, at vi bliver mere opmærksomme på, hvad respondenterne faktisk siger og samtidig sikrer, at vi ikke kommer til at acceptere respondentens syn på verden (Gibbs, 2007).

Teori

Efter at have beskrevet hvordan vores undersøgelsesdesign udformer sig, vil vi i det følgende beskrive vores teoretiske afsæt. Teorien vi har valgt at inddrage, henvender sig til to overordnede temaer; Singapore-matematik samt læring og konkrete materialer. Under Singapore-matematik hører teorierne af Jerome Bruner og Richard Skemp, mens der under læring og konkrete materialer hører forskning samt læringsstile. Fælles for alle teorier er at de indgår i analysen fra folkeskolen. Derudover indgår Jerome Bruners teori også i diskursanalysen.

Singapore-matematik

Singapore-matematik er, som tidligere nævnt, blevet en inspirationskilde for mange andre lande, da deres elever har opnået topplaceringer i PISA-undersøgelserne i de seneste årtier (Bull & Blankholm, 2023, s. 1). Derfor vil det følgende afsnit beskrive, hvad der er grundstenene for singaporeansk matematikundervisning. Når vi løbende gennem projektet refererer til Singapore-matematik, vil det således være det matematik didaktiske grundlag, som undervisning i Singapore bygger på.

Singapore-matematik er en metode udviklet af Singapores Ministerium for Uddannelse siden år 1965 (Kaur, et al., 2012). Målet er at udvikle kognitive og metakognitive færdigheder til en matematisk tilgang til problemløsning (Kaur, et al., 2012). Matematikundervisningen og pensum er baseret på didaktiske teorier fra blandt andet Lev Vygotsky, Richard Skemp, Zoltán Pál Dienes, Jerome Bruner og George Pólya (Sunde, Jóelsdóttir, & Pedersen, 2020, s. 2).

Vygotskys indflydelse på undervisningen kan ses i opgaver, hvor eleverne skal samarbejde og interagere med hinanden for at lære indholdet. Der arbejdes ud fra en ide om, at eleverne ikke skal lære en algoritme, men derimod opnå relationel forståelse, hvilket bygger på Skemp. Opstarten på et undervisningsemne vil blive præsenteret gennem en opgave om emnet, så elever selv kan starte med at udforske emnet, på egen hånd, som Dienes ville advokere. Efterhånden som eleverne arbejder med emnet vil de bevæge sig mod en formel tilgang (Har, 2019a).

Mange af aktiviteterne i undervisningsbøgerne vil bære præg af en tilgang, hvor elever går fra Concrete to Pictorial to Abstract (CPA). Denne tilgang er baseret på Jerome Bruners konkrete, visuel og abstrakt (Yoong & Hoe, 2009).

Jerome S. Bruners repræsentationsformer

Jerome S. Bruner var psykolog og forsker, hvor han arbejdede med kognitiv psykologi, uddannelse og læringsteorier inden for pædagogisk psykologi (Bull & Blankholm, 2023, s. 2). Bruner var inspireret af Piagets konstruktivistiske teori, der handler om hvordan barnet konstruerer og udvikler viden (Bull & Blankholm, 2023, s. 2). Han var optaget af begrebet repræsentation, og hvordan man kunne

omsætte sine erfaringer til modeller af virkeligheden (Bruner, 1972, s. 72). Her udviklede han tre-stadie-teorien, der beskriver repræsentationer på tre forskellige måder og er rettet mod børns kognitive udvikling (Bull & Blankholm, 2023, s. 2). De tre former for repræsentation er: enaktiv, ikonisk og symbolsk. Den enaktive repræsentation er kendetegnet ved at være handlingspræget. Den ikoniske kommer til udtryk gennem billeder, og den symbolske er karakteriseret ved ord eller sprog (Bruner, 1972, s. 20). I 1980'erne blev teorien videreudviklet og brugt ind i en matematisk kontekst, hvilket skyldes at Singapore ville basere deres undervisning på baggrund af denne teori, så eleverne lærte matematiske koncepter mere detaljeret (Bull & Blankholm, 2023, s. 1). Her blev repræsentationerne præsenteret som konkret (enaktiv), visuel (ikonisk) og abstrakt (symbolsk). I en matematikkontekst kan repræsentationerne bruges til at skabe en progression i undervisningen, hvor man starter med den enaktive repræsentation, derefter den visuelle, for til sidst at arbejde med den symbolske repræsentation (Bull & Blankholm, 2023, s. 9-11).

Konkrete repræsentationer er når eleverne arbejder med noget fysisk, hvor de er aktive i processen. Her arbejder eleverne med flere sanser, hvilket kan give dem større forståelse af matematikken. Det betyder også, at man ikke kan erstatte det konkrete med tegninger og billeder, da det ikke er noget man kan sanse og manipulere med (Bull & Blankholm, 2023, s. 10). Samtidig er det vigtigt at man ikke bruger dele fra hverdagen, som konkret materiale. Ifølge Bull og Blankholm vil det ofte være misvisende, hvis man bruger en pizza eller lagkage, fordi stykkerne ikke er præcis lige store og indholdet kan også variere en smule. F.eks. er det sjældent, at man får en pepperoni pizza, hvor der er lige meget pepperoni på alle stykkerne. Ifølge Bruner er det en nødvendighed at arbejde med det konkrete niveau, for at eleverne forstår matematiske problemer og har mulighed for at løse dem (Bull & Blankholm, 2023, s. 2).

Visuelle repræsentationer handler om hvordan man ser matematikken gennem mentale billeder. Skal eleverne løse og forstå et problem kræver det, at de kan visualisere problemet. Når man arbejder med matematik kan den visuelle repræsentation være et mellemlid mellem den konkrete og den abstrakte repræsentation (Bull & Blankholm, 2023, s. 3).

Den abstrakte repræsentation er kendetegnet ved brugen af matematiske symboler, bogstaver og ord. Den abstrakte repræsentation skal ikke præsenteres for eleverne, før de har en dybere forståelse af matematikken gennem et konkrete materiale og har evnen til at oversætte det til en visuel repræsentation (Bull & Blankholm, 2023, s. 12). Eleverne skal i arbejdet med den abstrakte

repræsentation være i stand til at forstå disse symboler for at kunne løse matematiske problemer (Bull & Blankholm, 2023, s. 3-4). Ofte er denne form for repræsentation knyttet til regler ved dannelse eller omdannelse. For eksempel er ligninger kendetegnet ved, at der indgår variable samt et lighedstegn.

Konkrete materialer med inddragelse af forskning

Konkrete materialer er et af de begreber, der er gennemgående i opgaven. Derfor vil vi indledningsvis uddybe begrebet. Når man tager udgangspunkt i ordbogens forklaring om konkret, er der tale om noget som er håndgribeligt og kan opleves med sanserne (Hårbøl, Schack, & Spang-Hanssen, 2020). Kobles dette sammen med matematikken opstår begrebet konkret materiale (Hansen, 2019, s. 194). Her vil forfatter til Matematikdidaktik Rune Hansen definere konkrete materialer som noget der handler om: "(...) at visualisere matematikken og konkretisere den på en måde, så eleverne kan opnå forståelser for matematikkens abstrakte natur." (Hansen, 2019, s. 194). I en metanalyse om effekten af undervisning med konkrete materialer, beskrives det at: "Math manipulative-based instructional techniques are approaches that include opportunities for students to physically interact with objects to learn target information" (Carbonneau, Marley, & Selig, 2013, s. 380).

Ud fra de ovenstående beskrivelser og med udgangspunkt i Bruners teori vil vi i opgaven have følgende forståelse af konkrete materialer: Et fysisk materiale eleverne kan anvende til at konkretisere matematikken ved brug af flere sanser, så de kan opnå forståelse for matematikkens abstrakte natur.

Forskning viser at det kan være en fordel at anvende konkrete materialer. Det skyldes, at eleverne får et materiale i hænderne, som er en reel repræsentation af matematikken og kan være gavnlig for udviklingen af matematiske begreber. Ydermere viser Boggan, Harper og Whitmires undersøgelse, at det særligt kan være en hjælp for lavt-præsterende elever (Cockett & Kilgour, 2015, s. 47). I en undersøgelse lavet af Xie, Antle, og Motamedi fremhæves det, at fordelene ved at bruge konkrete materialer indebærer elevernes øgede interesse og motivation, men også en øget effektivitet og forståelse (Cockett & Kilgour, 2015, s. 49). Ovenfor er beskrevet nogle af fordelene ved arbejdet med konkrete materialer, men det kan også medføre en væsentlig ulempe. Her viser Uttals undersøgelse, at eleverne i arbejdet enten vil bruge de konkrete materialer til at løse matematiske opgaver eller løse opgaverne abstrakt med skriftlige repræsentationer, men sjældent vil de kunne

forbinde de to repræsentationsformer (Cockett & Kilgour , 2015, s. 48-49). Dette er svært for eleverne, hvis læreren ikke eksplicit skaber forbindelser mellem repræsentationerne. Hvis læreren derimod lykkes med at skabe forbindelser, kan de konkrete materialer være med til lære eleverne at bygge bro mellem de tre repræsentationsformer (Cockett & Kilgour , 2015, s. 48-49).

Kira J. Carbonneau, Scott C. Marley, og James P. Selig har lavet en meta-undersøgelse, hvor de har undersøgt hvad effekten af elevernes læringsudbytte er, hvis man sammenligner en instruktion, hvor der anvendes konkrete materialer med en instruktion, hvor der bruges abstrakte symboler. Det konkluderes, at anvendelsen af konkrete materialer medfører en lille til mellemstor fordelagtig effekt på elevernes læringsudbytte. Styrken af effekten varierer afhængigt af flere faktorer; blandt andet hvilken mængde støtte elever bliver tilbudt under læringen, opfattelsen af et objekt og elevens kognitive udvikling (Carbonneau, Marley, & Selig, 2013, s. 396). Herudfra kan det udledes, at brugen af konkrete materialer ikke i sig selv øger elevernes udbytte af undervisning, og derfor skal implementeres i den didaktiske planlægning af undervisningen (Carbonneau, Marley, & Selig, 2013, s. 396).

Forståelse i matematik fra Richard Skemp's perspektiv

Richard Skemp er internationalt anerkendt som en autoritet inden for matematisk uddannelse, hvor han også integrerede psykologi. Han var optaget af, hvad der lå i begrebet 'forståelse' efter Stieg Mellin-Olsen, fra Bergen Universitet, gjorde opmærksom på, at der findes to forskellige betydninger af begrebet (Skemp, 1976, s. 20). Her påstod Skemp, at roden til mange vanskeligheder i matematik opstod netop, fordi der fandtes forskellige betydninger af ordet forståelse (Skemp, 1976, s. 20). Han skelner mellem relationel forståelse og instrumentel forståelse. Relationel forståelse handler om at vide hvad man skal gøre, og samtidig hvorfor man skal gøre netop dette. Instrumentel forståelse handler om at forstå regler uden at have en grund til at forstå dem. Her skal man kunne et hav af regler fremfor færre principper, der kan anvendes mere generelt (Skemp, 1976, s. 20-21).

I undervisningen kan der derfor opstå to typer af uoverensstemmelser. Den ene, hvis elevernes mål er at forstå noget instrumentelt, mens læreren ønsker at eleverne forstår det relationelt. Den anden modsat, hvis eleverne gerne vil forstå noget relationelt, men læreren underviser instrumentelt. (Skemp, 1976, s. 21-22).

Fordelene ved den instrumentelle forståelse er, at det er lettere at få en hel side med rigtige svar, fordi man kender reglen for hvordan man skal løse regnestykkerne. Samtidig giver det også en belønning med det samme, og man får følelsen af succes i faget. En tredje fordel er også at man hurtigt får et pålideligt svar, fordi der er mindre viden involveret (Skemp, 1976, s. 23).

Fordelene ved den relationelle forståelse er derimod, at man er mere tilpasningsdygtig, når man skal løse nye problemstillinger. Her har man en forståelse af hvorfor metoden virker, og kan på den måde overføre tankegangen til andre problemstillinger. Desuden tager det længere tid at forstå, hvorfor man kommer frem til det givne resultat, til gengæld kræver det repetition. Derfor vil det ikke tage længere tid på den lange bane. Slutligt er relationel forståelse også med til at gøre, at eleverne udforsker og undersøger nye forhold og områder (Skemp, 1976, s. 23-24).

Overordnet set, vil der være flest fordele ved at arbejde med den relationelle forståelse, eftersom den instrumentelle forståelse gør, at eleverne er afhængige af ekstern vejledning fra f.eks. en lærer, for hver gang de skal lære at gå en ny vej (Skemp, 1976, s. 25).

Dunn og Dunns syn på læringsstile

Ud over at man kan have forskellige forståelser i matematik, findes der også forskellige måder at lære på. Det er relevant at se på typer af læring, da konkrete materialer formodentligt henvender sig til nogle bestemte elever, hvorfor det er godt at være bevidst om som lærer.

Rita Dunn og Kenneth Dunn, professorer ved St. John's University, har udviklet en teori om læringsstile. De arbejder ud fra en definition af læringsstil der lyder: "Hvordan du bedst tilegner dig, koncentrerer dig, bearbejder, og husker ny og/eller svær information i en læringsituation" (Boström & Schmidt, 2011, s. 30).

Deres læringsstilsmodel indeholder 20 faktorer som har en målbar betydning for læringen. Disse er inddelt i fem områder: miljø, følelser, sociale, fysiske og psykologiske faktorer. Kombinationen af de individuelle præferencer kaldes læringsstil (Boström & Schmidt, 2011, s. 30). Af faktorer kan eksempelvis nævnes indre/ydre motivation, alene/parvis/gruppearbejde, høj/lav vedholdenhed eller tidspunkt på dagen. De faktorer, der har størst indvirkning på vores læringsstil, er vores hjernedominans og sanser. Sanserne inddeles i fire typer af læringskanaler; auditiv, visuel, taktile og kinæstetisk (Boström & Schmidt, 2011, s. 31). Mennesker, der lærer bedst ved at lytte til nogen, der taler eller udtrykker sig mundtligt i en diskussion om indholdet, har en auditiv præference (Boström &

Schmidt, 2011, s. 81). Hvis man har en visuel præference, kan læringen bedst ske gennem billeder, diagrammer eller film, hvor man kan danne mentale billeder eller ved at læse tekst fra eksempelvis bøger eller artikler (Boström & Schmidt, 2011, s. 82). Taktile personer forstår og husker bedst, når de er aktivt involverede. Dette kan ske gennem aktive hænder i praktisk arbejde eller ved tage noter i hånden (Boström & Schmidt, 2011, s. 83). Den sidste præference er kinæstetisk, hvor man vil lære bedst, når man bevæger sig fysisk og bruger hele kroppen (Boström & Schmidt, 2011, s. 84). Når det enkelte menneske lærer ud fra sine styrker og behov øger det motivationen, som skaber trivsel og bedre præstationer. Størstedelen af skolebørn er domineret af de taktile og kinæstetiske præferencer langt op i skoleårene. Dunn og Dunn pointerer desuden, at der ikke findes én læringsstil, som er bedre end de andre, der findes blot forskellige læringsstile (Boström & Schmidt, 2011, s. 84).

Analyse

Ud fra det teoretiske grundlag vil vi i det følgende gøre brug af dette gennem flere analyser. Først en diskursanalyse af en matematikbog, der skal give os en forståelse af, hvordan repræsentationer fremtræder i materialet. Dernæst en analyse af vores designproces, hvor der vil indgå teoretiske positioner undervejs. Designprocessen er brugt i forbindelse med fremstillingen af et konkret materiale for at fremme kvaliteten af produktet. Slutteligt vil der være en analyse af indsamlet empiri fra en folkeskole. Her er formålet at få indsigt i, hvordan elever modtager det konkrete materiale.

Diskursanalyse af et kapitel fra en matematikbog

I arbejdet med projektet har vi forsøgt at skaffe flere forskellige matematikbøger fra Singapore med det formål at analysere materialet. Først med henvendelse til TRACK-projektet, dernæst biblioteket og til sidst ved søgning på nettet. Gennem internettet lykkedes det at skaffe en digitaludgave af en elevbog fra Singapore. Efter at have set nærmere på bogen er det svært at sige noget om, hvordan de bruger forskellige repræsentationsformer og især den konkrete repræsentation. Dette skyldes, at der i bogen f.eks. ikke er tydelige markeringer, der viser hvilken repræsentation, der er i spil. Formodentligt vil dette være beskrevet i en lærervejledning, som vi ikke har haft mulighed for at anskaffe. I stedet vil analysen tage udgangspunkt i bogen *T-MAT i fjerde: FÆLLESBOG* (herfra T-MAT) (Jóelsdóttir, Sunde, Pedersen, & Drejer, 2022), som er udviklet af TRACK-projektet. Det er en dansk

bog, men den er inspireret af grundprincipperne fra Singapore. TRACK-projektet har udviklet bøger fra 4.-6. klasse. Når vi har fravalgt bogen fra sjette klasse, hvor niveauet er tættest på udskolingen, skyldes det, at fjerdeklases bogen indeholder et kapitel om ligninger, hvilket er det emne, vi har særligt fokus på. Diskursanalysen tager udgangspunkt i Faircloughs tredimensionelle analysemodel.

Tekst

Som tidligere nævnt tages der udgangspunkt i bogen T-MAT (Jóelsdóttir, Sunde, Pedersen, & Drejer, 2022). Vi har valgt at begrænse det til sidste kapitel i bogen, der omhandler ligninger. Kapitlet er inddelt i tre temaer: begrebsforståelse, ligningsløsning - uformelle metoder og problemløsning. Under de tre temaer er der inddelinger i moduler samt et fokus fra start. Antallet af moduler varierer fra tema til tema (Bilag 1).

Diskursiv praksis

Analysen vil tage udgangspunkt i Bruners tre-stadie-teori, hvor vi vil analysere ud fra de tre repræsentationsformer: konkret, visuel og abstrakt. I bogen er der brugt symboler til at illustrere, hvornår man arbejder med opgaven konkret, visuelt eller abstrakt. Et æble symboliserer det konkrete, en blyant det visuelle og et lighedstegn symboliserer det abstrakte niveau. Ved at bruge disse symboler bliver det tydeligt både for elever og læreren, hvordan eleverne skal arbejde. Det betyder også, at man som lærer ikke behøver at slå op i lærervejledningen for at undersøge, hvordan der skal arbejdes med den enkelte opgave.

Ser man kvantitativt på kapitlet, består det af 46 opgaver, hvor man bruger én af de tre repræsentationsformer. Her udgør de konkrete opgaver 15 %, de visuelle 39 % og 46 % er abstrakte opgaver (Bilag 2). Yderligere er det interessant at se på, hvordan de tre temaer er opbygget. Ifølge Bruner skal repræsentationerne være med til at skabe progression i undervisningen fra det konkrete til det abstrakte. I det første tema om begrebsforståelse, indgår der to konkrete opgaver. De indgår i to forskellige moduler, hvor de er præsenteret som den første opgave. Desuden bliver de efterfulgt af en visuel og en abstrakt opgave. Det betyder, at opgaverne følger progressionen, hvilket stemmer overens med Bruners teori. Ser man på den første konkrete opgave (Bilag 3), der omhandler tøjdyr, vil den ifølge Carbonneau, Marley, og Selig være misvisende, når man arbejder med konkrete materialer i matematik. Her kan samtalen f.eks. komme til at dreje sig om, hvilken hund der er sødest,

fremfor den egentlige opgaver. Det betyder, at fokus ender et helt andet sted end på matematik. I det næste tema, der omhandler ligningsløsning - uformelle metoder, består hele første modul af at arbejde med konkrete materialer samt tallinjen. Her indgår der 5 aktiviteter, hvor de konkrete materialer er i spil. Der bruges centicubes, tallinjer, tændstikker og lodvægte til at løse ligningerne. Ifølge Bull og Blankholm er disse materialer gode at bruge som konkrete materialer, fordi de er nøjagtig lige store og man undgår, at fokus er på noget andet end matematik. Derudover indgår der også et abstrakt element i de konkrete opgaver, fordi eleverne skal skrive den ligning ned, de har symboliseret med centicubes eller lignende. I opgaverne med tallinjen og en vægt bliver det også tydeligt at den visuelle repræsentation er i spil, eftersom repræsentationerne også indgår som billeder. Så selvom opgaverne er symboliseret som konkrete, indeholder de flere repræsentationer, hvor der er mulighed for progression i opgaverne. Nogle af opgaverne går direkte fra det konkrete til det abstrakte, mens andre også har den visuelle repræsentation med. I det sidste tema, problemløsning, indgår der ikke nogen konkrete opgaver, men både visuelle og abstrakte. Hvorvidt eleverne på dette tidspunkt ikke længere har brug for de konkrete materialer til løsning af ligninger, vides ikke. Ifølge Bruner er det en nødvendighed at arbejde med konkrete materialer for at forstå og løse matematiske problemer, derfor vil løsningen af disse opgaver afhænge af elevernes forståelse.

Social praksis

I den sociale praksis ser man nærmere på den samfundsmæssige kontekst. T-MAT bygger på Singapore-matematik. Forskningsprojektet tager udgangspunkt i Singapore, fordi de gennem de sidste 30 år har forbedret elevernes resultater, særligt de lavt-præsterende elever, hvilket ses i PISA og TIMSS (VIA University Collage, u.å.). Det har påvirket diskursen ved, at bogens opgaver bygger på de samme teorier som matematikbøgerne i Singapore. Desuden er der i Danmark krav til undervisningen fra ministeriet; heriblandt matematikfagets formål. Det betyder, at disse også kan have haft indflydelse på diskursen. Vi vil ikke udfolde analysen af den sociale praksis mere, da den ikke har så stor relevans for at kunne besvare vores problemformulering. Formålet var i stedet at give en orientering om, at der indgår forskellige sociale praksisser, som kan have indflydelse på de diskursive praksisser.

Diskursanalysen har givet os et indblik i, hvordan TRACK-projektet har tænkt de konkrete materialer ind i T-MAT, der henvender sig til mellemtrinnet. Det kunne vi godt tænke os at arbejde videre fra med henblik på at overføre det til udskoling. På den måde kan eleverne også arbejde med konkrete materialer, når ligningerne bliver mere komplekse. Derfor har vi forsøgt at udvikle et materiale til udskoling. At udvikle et materiale er komplekst, hvorfor har vi gjort det gennem en designproces, som beskrives i det følgende afsnit.

Analyse af Ligningsbrættet ud fra en designprocesmodel

Med inspiration fra ovenstående diskursanalyse, har vi valgt at udvikle et materiale, der kan hjælpe elever i udskoling med at løse ligninger. Materialet kalder vi *Ligningsbrættet* og det er udviklet gennem Iversen, Dindler og Smiths designprocesmodel (Iversen, Dindler, & Smith, 2019). En designprocesmodel søger at forbedre kvaliteten af et design, fordi problemet undersøges mere dybdegående. Her bliver man bevidst om, hvorfor man vælger eller fravælger forskellige dele af designet. Designprocesmodellen har været en hjælp til at udvikle materialet samt forholde sig kritisk til dette. Et kritisk perspektiv gennem processen er væsentlig, da det har medvirket til at gøre det tydeligt hvilke fordele og ulemper produktet har. Herved har man mulighed for at udvikle på produktet.

Udvikling af materiale gennem designproces

Designprocesmodellen består af seks aktiviteter: designudfordring, undersøgelse, idéudvikling, konstruktion, argumentation og refleksion. Det er ikke en fasemodel, men nærmere en kategorisering hvor man kan springe mellem forskellige aktiviteter gennem hele processen (Iversen, Dindler, & Smith, 2019, s. 43). Nedenfor vil vi beskrive, hvordan de forskellige kategorier har været i spil under vores udvikling af et konkret materiale til udskolingselever.

Designudfordring

Første del af processen startede, da der opstod en designudfordring. Vi ville gerne sikre en relationel forståelse i matematik i udskoling ved at anvende konkrete materialer. Vores hypotese var, at der mangler konkrete materialer til udskoling og særligt inden for det matematiske område algebra. Dette er på baggrund af erfaringer fra praktik og undervisning på læreruddannelsen. En designudfordring er et problem, man gerne vil løse, eller et potentiale man gerne vil forløse. Vores problem

er et komplekst problem, da der ikke findes nogen entydig løsning eller metode til at løse det (Iversen, Dindler, & Smith, 2019, s. 47-49). Sådanne problemer er designprocestilgangen særligt velegnet til, da den lægger op til, at man undersøger problemet og hvilke faktorer, der har indflydelse på løsningen. Dette er med til at sikre, at man ikke bliver handlingslammet over situationens kompleksitet, men har noget at arbejde ud fra. Her kan det være en ide at udforme nogle krav til løsningen (Iversen, Dindler, & Smith, 2019, s. 54). Under designprocessen har vi arbejdet ud fra krav om at produktet skal indeholde et konkret materiale. Derudover skal det laves simpelt, så folkeskoleelever kan bruge det, og lærere kan se relevansen ved at anvende det. Grunden til, at vi ønsker at udarbejde et konkret materiale skyldes, at vi har opdaget, at der er mangel på sådanne materialer i udskolingen. Et afgørende mål under udviklingen af produktet, er at øge den relationelle forståelse indenfor det matematiske emne. Grundlaget for at kunne idégenere, hvor kravene til det komplekse problem er opfyldt, er undersøgelserne som beskrives efterfølgende.

Undersøgelse

I undersøgelsen handler det om at læse artikler og finde viden, der er relevant for processen (Iversen, Dindler, & Smith, 2019, s. 62). Vi startede med at gå på et Center For Undervisning-bibliotek (CFU), hvor vi foretog en kvantitativ undersøgelse (Bilag 4) af de konkrete materialer, som CFU ligger inde med. Her undersøgte vi, hvor mange konkrete materialer der fandtes inden for de tre matematiske områder: tal og algebra, geometri og statistik samt en kategori vi kaldte "andet". Andet-kategorien er til de materialer, der ikke passede under de tre matematikemner. Vi fandt frem, til at langt størstedelen af materialerne hørte til kategorien geometri, hvor tal og algebra kun indeholdt meget få materialer. Her fik vi bekræftet vores hypotese om, at der findes færre konkrete materialer indenfor algebra sammenlignet med de andre emner i matematik. I undersøgelsen er dokumentation særligt vigtig, fordi det er med til at understøtte, hvorfor det er relevant at arbejde videre med den designudfordring man har valgt (Iversen, Dindler, & Smith, 2019, s. 67). Vores kvantitative undersøgelse (Bilag 4) kan dermed være med til at understøtte, at der ikke findes særlig mange konkrete materialer inden for algebra, hvilket vi kan arbejde videre ud fra.

Udover resultatet fra den kvantitative undersøgelse søgte vi også viden om Singapore-matematik, eftersom Singapore er et af de førende lande i PISA-undersøgelserne (Bull & Blankholm, 2023, s. 1). Singaporeansk matematikpensum bygger blandt andet på Jerome Bruners teori om repræsenta-

tionsformer, hvorfor vi fandt det relevant at undersøge matematikbøger. Dette gjorde vi gennem to elevbøger, der er godkendt fra Singapores ministerium til secondary school, hvilket svarer til uddannelsen. Her så vi, at bøgerne primært anvender den visuelle og abstrakte repræsentation. Vi arbejdede derfor videre med T-MAT, som vi analyserede med fokus på repræsentationsformer.

Gennem undersøgelsen fik vi bekræftet, at der ikke findes mange konkrete materialer indenfor algebra. Med afsæt i denne viden arbejdede vi videre med idéudviklingen. Når man skifter fra undersøgelse til idéudvikling, ændres ens tankesæt. I undersøgelsen var fokus at forstå designprocessen, samt hvordan man kunne skabe mening. Herimod handler idéudvikling om, hvordan man kan generere idéer, der kan være med til at løse designudfordringen (Iversen, Dindler, & Smith, 2019, s. 77).

Idéudvikling

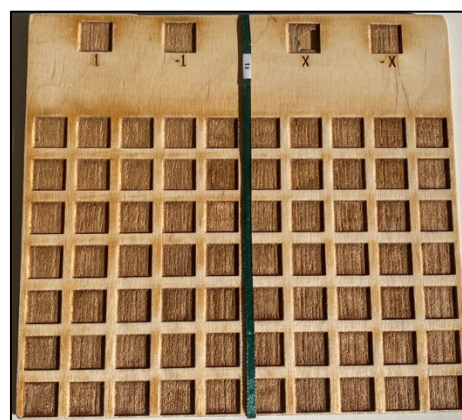
Idéudviklingen handler om designidéerne. Her arbejder man ud fra to forskellige tankegange; divergent og konvergent tænkning. Divergent tænkning handler om at folde problemet ud og se det fra flere forskellige vinkler (Petropouleas, et al., 2022). I denne proces arbejder man ofte med idégenerering, hvor man kan bruge forskellige brainstorm-øvelser. Konvergent tænkning betyder, at man snævrer idéerne ind og frasorterer nogle idéer for at dedikere sine tankeprocesser i én bestemt retning. Det er også her man finder argumentation for en mere præcis definition af problemet (Petropouleas, et al., 2022). I vores idéudvikling startede vi med divergent tænkning, hvor vi brainstormede på forskellige idéer til et konkret materiale til algebra. Her handlede det ikke om at komme med den mest kvalificerede idé, men blot at få startet ens tanker. Anvendelsen af en tallinje, brug af centicubes, Cuisenaire-brikker og blokmodellen var nogle af flere idéer, der kom i spil under brainstormprocessen. Herefter fortsatte genereringen mere ubevidst gennem tilfældige situationer for eksempel under madlavning eller på løbeturen, som er særligt kendetegnende for idégenereringsprocessen (Iversen, Dindler, & Smith, 2019, s. 78). Efterfølgende gik vi over til den konvergente tænkning, hvor vi tog udgangspunkt i to idéer; en tidslinje med brug af centicubes og to rektangler med centicubes, der skulle beskrive hver sin side af ligningen. Her gik vi i dybden med at forfine og forbedre de to idéer gennem et designsprint, som d.Schools har udviklet (d.Schools Stanford, u.å.). Her kom vi frem til, at der var størst potentiale i at arbejde videre med rektangler med centicubes. Ofte bliver ens idé en kombination af flere idéer, man bliver inspireret af (Iversen, Dindler, & Smith,

2019, s. 81). Vores materiale er inspireret af Pernille Pinds algebrabrikker (Pind, 2022) samt Numicon med brikker fra Singapore (Har, 2019b). Fra Pinds algebrabrikker har vi fundet inspiration til, at positive og negative tal har hver sin farve og det samme for variable. Fra Numicon, udviklet i Singapore, er vi inspireret af en plade med huller, samt det at ligge brikker ned i forskellige felter. Under udviklingen vil man intuitivt tænke, at det er lettest, hvis man kun har få begrænsninger, men erfaring har vist, at det er overvejende modsat (Iversen, Dindler, & Smith, 2019, s. 83). Vi havde på forhånd lavet en begrænsning ved, at det konkrete materiale skal give eleverne en relationel forståelse. Til gengæld ville vi gerne have, at materialet kunne løse alle slags ligninger. Her erfarede vi også, at det er svært at udvikle et materiale, der kan alt. Derfor valgte vi at fokusere på, at materialet kunne løse ligninger, der indeholdt positive og negative tal, men ikke brøker og andengradsligninger. På den måde blev det lettere at arbejde videre med materialet. Senere fandt vi dog frem til, hvordan man kan bruge materialet til at løse ligninger med brøker.

Vi er i processen gået til og fra undersøgelsen og ideudviklingen ad flere omgange. Det skyldes blandt andet, at vi undervejs har haft flere vejledninger med vores bachelorvejledere. Her har vi været igennem flere iterationer, der har gjort os klogere. Et eksempel på dette var, da vi fik inspiration til, hvordan man kunne bruge Ligningsbrættet til at løse ligninger med brøker. Forslaget handlede om at bruge mere end én centicube som x -værdi. Det testede vi efterfølgende med mange forskellige ligninger for at sikre, at det passede på flere forskellige typer af ligninger med brøker. Det har medvirket til en iterativ proces, som har haft betydning for vores konstruktioner.

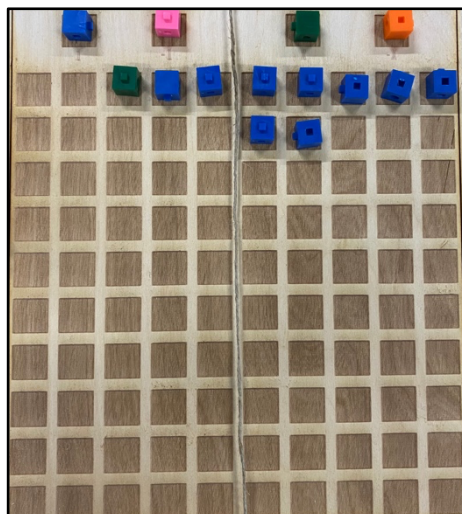
Konstruktion

Efter udvælgelsen af rektanglerne hvor der anvendes centicubes, blev de videreudviklet til en samlet plade som blev tegnet på papir. Denne skitse var første trin i konstruktionen, når man følger konstruktionsloven (Iversen, Dindler, & Smith, 2019, s. 92). De efterfølgende steps er mockup, prototype og produkt. Formålet med at konstruere modeller af idéen er at give en fysisk form og gøre det håndgribeligt for andre (Iversen, Dindler, & Smith, 2019, s. 95). Vi lavede til en start en mockup, der er kendetegnet ved at være billig og hurtig at fremstille.



Figur 2: Prototype nr. 2 af Ligningsbrættet

Derudover skal den være velegnet til at undersøge designidéens funktion (Iversen, Dindler, & Smith, 2019, s. 95). Vores mockup var et papir med streger. Ud fra denne var det muligt at teste anvendelsen gennem forskellige typer af ligninger. Prototypen har dele af de funktioner, som det endelige produkt indeholder, og derfor kan man på bedre grundlag demonstrere, hvordan den virker (Iversen, Dindler, & Smith, 2019, s. 94). Vi har fremstillet flere prototyper ved at lasercutte felter, tal og bogstaver i birkefinerplader 4 mm (Figur 2 og 3). Efterfølgende har vi tilføjet et bånd rundt om pladen, som kan flyttes fra side til side. Under udviklingen af de forskellige prototyper er der blevet foretaget små ændringer i designet. Disse prototyper blev anvendt til afprøvning af anvendelsen blandt folkeskoleelever og lærere. Herefter blev der vendt tilbage til selve designudfordringen, undersøgelse og idégenereringen. Dette førte til de sidste ændringer, hvorefter produktet blev fremstillet. Et produkt er kendetegnet ved at være fuldt funktionelt, sikret og egnet til ibrugtagning (Iversen, Dindler, & Smith, 2019, s. 94).



Figur 3: Prototype nr. 1 af Ligningsbrættet

Argumentation

I en designproces træffes der mange valg, der kræver en begrundelse. Begrundelserne kan både være på mikro- og makroniveau (Iversen, Dindler, & Smith, 2019, s. 103). Mikroniveauet vil, i vores tilfælde, være valget af træ til pladen frem for papir. Det skyldes, at papir til forveksling kan ligne en visuel repræsentation, hvor vi ønsker, at det er tydeligt, at det er en konkrete repræsentation. Ved at bruge træ har vi også muligheden for at lave forskellige niveauer i træet, hvilket betyder, at en centicube ikke kan rykke sig uden for et felt, fordi feltet er dybere. Derudover indeholder mikroniveauet også de spørgsmål, vi har lavet til fokusgruppeinterview og valget om, at lighedstegnet skal være et synligt symbol på snoren. Det synlige lighedstegn blev besluttet efter feedback fra en bachelorvejleder. Det skyldes blandt andet, at lighedstegnet er en central del af arbejdet med ligninger. Det synlige ligningstegn på snoren har til formål at mindske forvirringen hos eleverne. På makroniveau handler det om de krav, vi har udvalgt til produktet, samt hvilke personer som har været en del af processen. Et krav er, at det skal være et konkret materiale. Det betyder ifølge Bruner, at

det er et fysisk materiale, hvor der er mulighed for at interagere med det. Det er derfor en af årsagerne til, at vi har valgt at man kan flytte rundt med centicubes på brættet fremfor eksempelvis at tegne det. Undervejs havde vi flere idéer til hvilke brikker, der skulle bruges, heriblandt Cuisenaire-regneklodser og fremstilling af egne klodser. Vi endte med at anvende centicubes, fordi langt de fleste skoler allerede har mange af dem til at ligge. At dette er afgørende for vores valg skyldes, at alle FN's medlemslande er forpligtet på at gøre en indsats for at opnå de 17 verdensmål (UNDP's nordiske kontor, u.å. a). Dette indbefatter blandt andet at have et ansvarligt forbrug og produktion (UNDP's nordiske kontor, u.å. b). Derfor ville det være mere bæredygtigt, hvis man genbruger dem, frem for at fremstille nye og nærmest ens brikker.

En styrke ved vores materiale er, at det er simpelt at forstå og samtidig kan man løse mange forskellige former for ligninger. Det er i modsætning til de få konkrete materialer, der findes på dette område, hvor materialerne enten er meget komplekse, eller hvor de ikke kan løse flere forskellige typer ligninger. Som følge af ovenstående argumenter samt efter afprøvning af materialet er der sket ændringer i konstruktionen, hvilket har resulteret i en iterativ proces.

Refleksion

Refleksion handler om, de erfaringer vi har fået gennem processen. I vores proces har der indgået en afprøvning af materialet på en skole, hvor vi har interviewet lærere og elever. Derfor vil der i dette afsnit indgå perspektiver fra dem med henvisninger til bilag.

Refleksion kan inddeles i tre fokusområder, som i det følgende vil uddybes med udgangspunkt i vores produkt. Det første er introspektion, som handler om den viden og de erfaringer, man har fået gennem processen, og hvordan det har bidraget til udviklingen af designerens repertoire (Iversen, Dindler, & Smith, 2019, s. 113). I processen har vi udviklet vores evner til at undersøge problemstillinger, samt at kunne idégenerere på flere designs. I fremstillingsprocessen har vi udviklet kundskaber i brugen af en laserskærer.

Det næste fokus er intentionen, hvor man reflekterer over valg og fravalg, der er foretaget i processen (Iversen, Dindler, & Smith, 2019, s. 113). I udviklingen af Ligningsbrættet valgte vi for eksempel at bruge centicubes som de brikker, der skulle placeres på brættet. Undervejs havde vi flere idéer til hvilke brikker, der skulle bruges; heriblandt Cuisenaire-regneklodser og fremstilling af egne klodser. Vi endte dog med at bruge centicubes. Det viste sig ude på skolen, at eleverne havde svært ved

at arbejde med centicubes, når de ikke brugte de samme farver, som videoerne viste, eller som deres sidemakker havde (Bilag 5.2, afsnit 6). Derfor vil det være en fordel ved videre brug i skolen, at der er udvalgt fire farver, som alle eleverne bruger for at mindske forvirringen hos eleverne. En anden overvejelse var fastgørelse af snoren, der symboliserer lighedstegnet. I prototypen kunne snoren falde af, hvis man blot rykkede den langt nok. Her valgte vi i stedet at lave et felt, som snoren kunne sidde fast i. Når eleverne bruger brættet i skolen, vil nogle formodentligt komme til at lege med snoren, hvilket kan resultere i, at man lige pludselig har 5 Ligningsbrætter uden snor, og derfor skal lave nye snore for at Ligningsbrættet kan bruges igen.

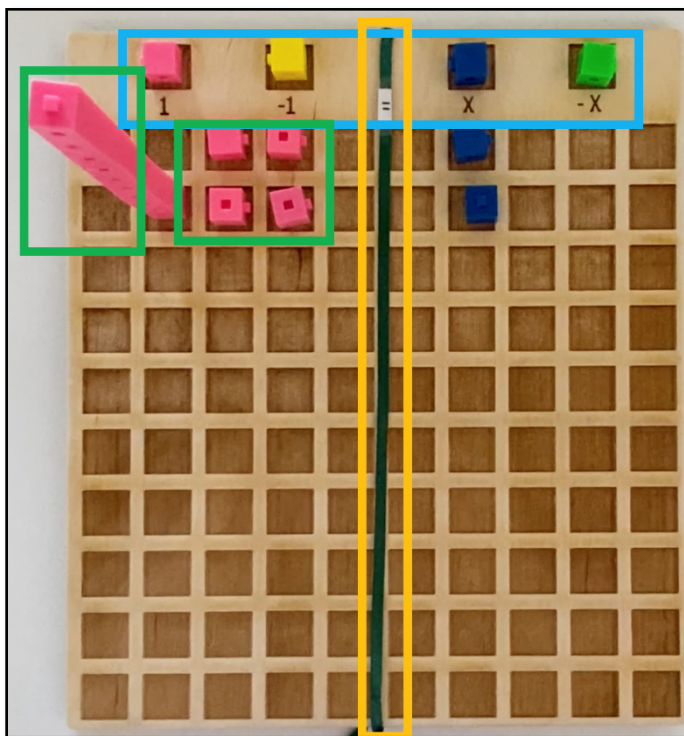
Det sidste fokuspunkt er implikation, der handler om hvilke implikationer artefaktet kan få for individ, fællesskaber og samfund ved implementering (Iversen, Dindler, & Smith, 2019, s. 113). Ved implementering af Ligningsbrættet i folkeskolen, kan det for nogle skabe forvirring og frustration, hvis eleverne ikke forstår, hvordan man kan bruge det. På den anden side kan det også skabe glæde og forståelse for andre elever, der førhen har haft svært ved at forstå ligninger. Desuden har vi lagt mærke til, at det er et materiale, der kræver, at læreren på forhånd har sat sig ind i det for at kunne forstå og bruge det med elever. En af lærerne havde en forventning om, at han kunne forstå og hjælpe eleverne med at bruge materialet uden at have sat sig ind i det på forhånd. Det var ikke tilfældet, og han følte sig derfor som en dårlig lærer (Bilag 7.2, afsnit 2). Det er derfor en forudsætning, at lærerne skal bruge forberedelsestid på at forstå materialet, for at kunne bruge det i klassen.

Beskrivelse af Ligningsbrættet

Herover blevet det beskrevet, hvilken designproces vi har gennemgået for at udvikle et konkret produkt. Efterfølgende vil være en nærmere beskrivelse af selve produktet, som vi anvendte i afprøvningsen med 7. klasses elever.

Ligningsbrættet er en plade, der indeholder 10 x 10 kvadratiske felter, hvor man kan lægge én centicube i hvert felt eller stable ti i højden (Markeret med grøn på figur 2). Ovenfor de kvadratiske felter er der yderligere fire kvadrater, som symboliserer x , $-x$, 1 eller -1 (Markeret med blå på figur 2). Formålet med disse firkanter er, at eleverne skal lægge fire forskellige farver centicubes, som repræsentation for x 'erne og 1 'erne. Derudover er der placeret en snor med et lighedstegn rundt om pladen, som skal symbolisere lighedstegnet (Markeret med gul på figur 2). På den måde kan man skelne mellem det, der står på højre og venstre side af lighedstegnet.

Snoren kan flyttes, hvis enten venstre eller højre side i ligningen indeholder høje tal eller variable, så brættet bliver mere fleksibelt. Måden man løser en ligning på, er ved at lægge de forskellig farvede centicubes ned på brættet, som de er repræsenteret i ligningen. Har man eksempelvis ligningen $14 = 2 \cdot x$, hvor x er blå centicubes og 1 er lyserøde centicubes, vil man på venstre side have fjorten lyserøde centicubes og på højre side have to blå centicubes. Herefter kan man flytte rundt på centicubesne, så det passer med at der ligger syv lyserøde ud for én blå. Den introducerende video produceret til eleverne kan ses ved at scanne QR-koden.



Figur 4: Ligningsbrættet med markeringer omkring lighedstegnet (gul), de fire bestemte farver centicubes (blå) og anvendelsen af centicubes (grøn)



Figur 5: QR-kode som viser hen til en introduktionsvideo om Ligningsbrættet

Analyse af indsamlet empiri fra folkeskole

I gennem designprocessen har vi udviklet et konkret materiale, som i det ovenstående blev beskrevet som det Ligningsbræt, vi anvendte til at samle empiri på en folkeskole i en 7.klasse. Analysen tager udgangspunkt i empirien, der består af observationer af elevernes arbejde med materialet, to fokusgruppe elevinterviews samt et lærerinterview. Vi har kodet elevinterviewene efter tre overordnede kategorier; forståelse, anvendelse af materialet og repræsentationsformer. Desuden har vi kodet et lærerinterview efter to kategorier; stilladsering af Ligningsbrættet, samt lærernes holdninger til materialet. I det følgende vil vi analysere data med udgangspunkt i elevernes forståelse af materialet.

Elevernes forståelse af Ligningsbrættet

På skolen blev eleverne introduceret til Ligningsbrættet ved at se en video. Samtidig fik de tildelt et arbejdsark, der skulle stilladsere elevernes arbejde med Ligningsbrættet. Eleverne arbejdede med materialet i ca. 25-30 min, hvorefter de deltog i et gruppeinterview. Her gav størstedelen af eleverne udtryk for, at det var svært at forstå Ligningsbrættet til at starte med. Nora beskriver det således (Bilag 6.1, afsnit 1):

Nora: Jeg synes det var lidt svært, men alligevel så var det sådan lidt lettere end normalt.

Interviewer: Okay. Hvad var det, der gjorde det?

Nora: Det var sådan, man skal lige finde ud af, hvordan det fungerede.

Når Nora giver udtryk for, at det er svært at forstå i starten, kan det skyldes, at hun har en instrumentel forståelse. I henhold til Skemp er det med den instrumentelle forståelse, sværere at løse nye problemstillinger uden at få hjælp. Derfor var starten af arbejdet udfordrende. Når Nora udtaler, at det er lidt lettere end normalt, kan det skyldes, at hun i arbejdet har opbygget en instrumentel forståelse af hvordan man anvender Ligningsbrættet. Det kan være nemmere at forstå ligningen, når den løses med et konkret materiale fremfor en løsning på abstrakt niveau. En anden grund til at det bliver lettere at arbejde med ligninger, kan være at Ligningsbrættet medvirker til opbygningen af en relationel forståelse, fordi trinene til løsningen af ligningen bliver tydeliggjort gennem det konkrete materiale. Ifølge Bruner er det at arbejde med et konkret materiale et lavere trin end arbejdet på et abstrakt niveau.

Rene var modsigende i forhold til de andre og udtalte følgende om brugen af materialet: "Jeg synes, det var fint nok nemt at forstå, og det gjorde det meget simpelt" (Bilag 6.1, afsnit 2). Rene beskriver, at materialet har gjort det mere simpelt for ham at forstå ligninger. Om dette siges på baggrund af, at han tidligere har haft en instrumentel eller relationel forståelse for ligninger, jævnfør Skemp, er vanskeligt at vurdere. Årsagen til hans udtalelse kan være, at han inden arbejdet havde en relationel forståelse. Hvilket kan have bevirket til, at han hurtigt kan koble sin viden fra tidligere og anvende Ligningsbrættet, selvom det er en anden måde at løse ligninger. Udtalelsen kan også ses som en indikation på, at han havde en instrumentel forståelse forinden, hvor hukommelsen bruger meget energi på at huske regler. Hvorimod arbejdet med Ligningsbrættet har skabt en relationel forståelse, så det for Rene er blevet mere simpelt, da der ikke længere er den samme mængde af regler at huske. Når man ser på den lille mængde af tid Rene har arbejdet med Ligningsbrættet, kan der argumenteres for, at tidsintervallet sandsynligvis har været for kort til, at det har sikret den relationelle forståelse. Det kræver ifølge Skemp længere tid at udvikle den relationelle forståelse end den instrumentelle.

Hvorvidt eleverne har en relationel eller instrumentel forståelse af matematik, er svært at vurdere. Noget tyder på, at Nora havde en instrumentel forståelse inden arbejdet, men det er svært at sige, om hun har opbygget relationel forståelse undervejs i arbejdet med materialet. Renes forståelse er dog tvetydig. Han kan både have haft en relationel og instrumentel forståelse inden arbejdet med materialet. Det samme gælder i arbejdet med materialet, da det er svært at få indblik i Renes tankegang. Et andet perspektiv der også er relevant at se på, når eleverne arbejder med materialet, er anvendelsen.

Elevernes anvendelse af Ligningsbrættet

Igennem interviewet ønskede vi at få et indblik i elevernes mening om anvendelsen af Ligningsbrættet. Derfor blev de spurgt om de ved løsning af fremtidige ligninger vil bruge materialet eller den metode, som de kender fra tidligere undervisning. Svarene fra to af eleverne lyder som følger (Bilag 6.2, afsnit 2):

Finn: Halv/halv

Max: Altså ja, til nogle af de sådan mere enkle {ligninger}, der vil jeg nok bare bruge hjernen. Men det der er sådan lidt mere kompliceret, der vil jeg nok bruge den der [henviser til Ligningsbrættet]

Finn: Lige nemlig

De giver udtryk for, at de ved løsning af mere komplekse ligninger ser en mening i at anvende Ligningsbrættet. Det kan forstås som, at materialet bliver overflødig ved de enkle ligninger, som de vil løse med hovedregning, da de kender en metode fra undervisningen. Efterfølgende i interviewet uddyber eleverne, at komplicerede ligninger er med mange tal, hvor der indgår både negative og positive ubekendte og tal (f.eks. $2 \cdot x - 3 = 7$) (Bilag 6.2, afsnit 5). Set ud fra Bruners teori, som siger at repræsentationer kan bruges til at skabe en progression, vil anvendelsen af Ligningsbrættet, til de komplicerede ligninger, være elevernes måde at forsimple opgaverne. Det kan være nødvendigt, hvis der sker en stor stigning i progression og sværhedsgraderne.

Ovenstående var to af elevernes begrundelse for, hvornår materialet kunne anvendes. Iben blev også adspurgt, hvorfor hun vil bruge det: "Det er bare sådan.... Det er også lidt sjovere" (Bilag 6.2, afsnit 1). I hendes uddybning kom det frem, at det skyldes to grunde; at der var noget, hun kunne rykke rundt på, brikkerne, og fordi det var anderledes (Bilag 6.2, afsnit 1). Hun har dermed to begrundelser for, at det er sjovere. I Ibens første begrundelse skyldes det, at der er noget man kan rykke rundt, det henvises til den håndgribelige del af arbejde med materialet. Hendes opfattelse stemmer overens med Xie, Antle og Motamedis undersøgelsen om konkrete materialer, der fandt frem til at eleverne havde en øget interesse og motivation for emnet, når man arbejder med konkrete materialer. Det kan ifølge Dunn og Dunns fire læringskanaler skyldes, at arbejdet med hænderne kan øge motivationen hos elever, der har en taktil præference. Iben er muligvis blandt de elever som lærer bedst gennem den taktile sans, hvorfor det er fordelagtigt for hende at have noget i hænderne, imens der arbejdes. Den anden begrundelse for Ibens interesse i arbejdet med materialet er, at det er anderledes. Denne motivationsfaktor vil være svær at bevare, hvis materialet blev en integreret del af undervisningen.

Samlet peger det på, at eleverne vil anvende Ligningsbrættet af forskellige grunde. Nogle elever vil bruge det for at simplificere svære ligninger, mens andre gør det for at være motiveret i undervisningen.

Den konkrete repræsentation sammenlignet med andre repræsentationsformer

Efter arbejdet med materialerne blev eleverne adspurgt om de kunne mærke forskel på at arbejde med Ligningsbrættet, i modsætning til hvis de skulle arbejde, som de er vant til med deres lærere.

Rene udtalte følgende (Bilag 6.3, afsnit 2):

”Det er også nemmere, hvad skal man sige at kunne se det for sig, når de ligger på / brikkerne, end hvis det bare er tal på et papir eller det lægger op i hovedet.”

Her siger eleven, at det er en fordel at arbejde med et konkret materiale, da han beskriver, at det er lettere, når man kan bruge brikkerne til at løse ligningerne. Ydermere giver han udtryk for, at det er sværere, hvis man skal have tal på et papir. Jævnfør Bruner vil ligningen, der er skrevet på papir eller tænkning i hovedet, være abstrakt, da det er symbolsprog. Her forstås det, at den konkrete og visuelle del er på første trin i progressionen, således er der en mindre kognitiv udfordring, når der arbejdes ud fra materialet. Arbejdet med flere af sanserne kan også, ifølge Bruners teori, være med til at give en større forståelse af matematikken. Det kan derfor også være en af grundene til, at Rene synes, det er en fordel at arbejde med materialet.

Generelt fremhæver eleverne i forklaringen af, hvorfor de lettere kan forstå opgaverne, når de anvender materialet, at de kan ”se det for sig”. Eva forklarer det sådan: ”Det ved jeg ik’, sådan. Man kan se det sådan lidt bedre. Sådan at man kan rykke rundt og alt det der” (Bilag 6.3, afsnit 3). På den ene side kan man forbinde med det visuelle trin, fordi eleverne ikke beskriver, det som noget de gør, men noget de ser en form for mentale billeder. På den anden side kan udtalelsen ses som elevens måde at forsøge at forklare, at det er nemmere, når man arbejder med opgaven fysisk, hvor de ud fra dette arbejde danner mentale billeder, som kan oversættes til visuelle repræsentationer. Ud fra det Eva forklarer, lyder det til, at hun både arbejder med den konkrete repræsentation, men samtidig danner den visuelle forståelse gennem arbejdet.

Samlet set viser det sig, at eleverne ser det som en fordel at arbejde med et konkret materiale frem for på det abstrakte niveau. Eleverne giver udtryk for, at det er lettere at se det for sig og danner formodentlig mentale billeder ud fra arbejdet med konkrete materialer. Selvom eleverne er enige i, at det er lettere at bruge det konkrete materiale, er der forskel på, hvor let det er. Det afhænger formodentlig af, om man er en højt- eller lavt-præsterende elev, hvilket vi vil uddybe i det følgende.

Ligningsbrættes betydning for lavt- og højt-præsterende elever

I Boggan, Harper og Whitmires undersøgelse om konkrete materialer, viste resultaterne, at det kan være en særlig hjælp til de elever, der er lavt-præsterende, at anvende konkrete materialer. I forbindelse med Ligningsbrættet kan dette analyseres ud fra observationer af Max og Finns gruppearbejde. Lærerne havde udvalgt elever med forskellige niveauer efter ønske fra os. Ifølge lærerne er Max en højt-præsterende elev indenfor matematik, hvorimod Finn er en lavt-præsterende elev. Nedenstående observation er et eksempel på deres gruppearbejde (Bilag 5.2, afsnit 4).

Finn siger til Max: "Jeg fatter fuldstændig hat"

Max siger: "Du skal forklare at det giver 5"

Max repeterer, at $+1$ og -1 er lig med 0, så de kan gå ud. Han tager brikkerne væk med hænderne på Finns plade.

Max: "Er du med?"

Finn: "Mmh (bekræftende)"

Max: "Se nu giver det $x = 5$. Gul er x og der er fem blå som er 1"

Igennem observationen bliver det tydeligt, at Max kan bruge materialet modsat Finn, der har brug for hjælp, da han har svært ved at arbejde med materialet alene. Senere i arbejdet får Finn igen brug for assistance for at kunne lave opgaverne (Bilag 5.2, afsnit 6). Ud fra dette kan det ses, at Finn har brug for hjælp, hver gang han skal starte på noget nyt med materialet. I et analytisk perspektiv kan man se flere mulige årsager hertil. For det første kan det være, at Finn har en instrumentel forståelse af ligninger. Det ses fordi en af kendetegnene ved denne forståelse er, ifølge Skemp, at man har brug for vejledning, hver gang der introduceres nye elementer i emnet. For det andet kan nødvendigheden af meget hjælp, som det ses i observationen (Bilag 5.2, afsnit 4-7), forstås sådan, at materialet ikke umiddelbart hjælper den lavt-præsterende mere end den højt-præsterende. Det modsiger resultaterne fra undersøgelsen lavet af Boggan, Harper og Whitmire. De indsamlede observationer er kun foretaget på én skole med to 7. klasser, og kan derfor ikke generaliseres.

Undervisningsformen ved anvendelse af Ligningsbrættet

Under afprøvningen af materialet var der to lærere til stede, Bo og Lis. De blev interviewet sammen efter afslutningen af undervisningslektionerne. Her giver Bo udtryk for, at han er i tvivl om intentionen er at arbejde med materialet som klasseundervisning eller ekstraundervisning, for de elever

som har svært ved ligninger. Han bekræfter undervejs, at den bedste løsning sandsynligvis er at undervise nogle få med det (Bilag 7.1, afsnit 1).

Herudfra kan det tolkes, at observationerne har gjort det tydeligt for ham, at det var svært at anvende i en hel klasse, eksempelvis fordi det kunne være med til at skabe for meget uro. En anden mulighed kunne være, at læreren ikke så relevansen af at anvende materialet til de elever, som har en forståelse for ligningsløsning, men kun til elever som har svært ved at forstå, hvordan ligningerne kan løses og omskrives. Bos udtalelse kan forstås sådan, at han kan se et potentiale i at anvende materialet til elever som er lavt-præsterende. Lærerens tanke understøttes af Boggan, Harper og Whitmires undersøgelse, som viser at konkrete materialer er fordelagtige for lavt-præsterende. Kigger man derimod på Bruners perspektiv vil progressionen, med start i en sansepræget undervisning med konkrete materialer, være første stadie for alle elever. Derfor kan arbejdet med Ligningsbrættet i en klasse være med til at skabe en større forståelse for flere elever end de lavt præsterende. Når læreren alligevel har overvejelser om anvendelsen, kan det skyldes, at afprøvnin-gen af materialet foregik i en klasse, som før har arbejdet med ligninger ad flere omgange. Det har medført, at nogle elever har en forståelse af ligninger på et visuelt og abstrakt niveau, hvilket betyder, at arbejdet med materialet vil være et trin ned i forhold til progressionen for disse elever. Ud-over at materialet muligvis vil kunne bidrage til en større forståelse, kommenterer en af lærerne på, hvad den fælles anvendelse på klassen kan bidrage med. Hun udtaler (Bilag 7.2, afsnit 1):

Lis: Det ville hjælpe med at udligne den der med, at nu har jeg brug for hjælpemid-ler. Der er nogle {elever} der sorterer hjælpemidler fra, fordi det er for pinligt at sidde med. Måske det kan være med til at lette matematikundervisningen, at det bliver mere okay at bruge det.

Ud fra dette kan det forstås, at hun ser en fordel i at gøre brugen af materialet obligatorisk. Dette kan medføre, at beslutningen om til- eller fravalget af materialet ikke vil føre til grupperinger i klas-sen. Denne overvejelse kan være med til at begrunde, at anvendelsen vil være fordelagtigt på klas-sen.

Organiseringen af undervisningen med brug af Ligningsbrættet

Igennem interviewet med lærerne blev det tydeligt, at de i høj grad er praksisnære, eksempelvis var de meget interesserede i, hvordan materialet skal inkorporeres i undervisningen om ligninger. Som

følge af deres mangeårige erfaring i matematikundervisning, er der nogle overvejelser og refleksioner som kommer til udtryk efter at have set afprøvningen af materialet i klasserne. Blandt andet udtaler læreren Bo følgende (Bilag 7.1, afsnit 5):

“Altså nu har I det her. Det er én måde at gøre det på, og så kan man lave noget på en anden måde. Altså man skal jo aldrig kun gøre det på en måde. Hvis man nu siger, at det her appellerer det til nogle bestemte elever? Hvem er det, vi rammer her? “

Ud fra hans observationer er det blevet iøjnefaldende, at når man arbejder med Ligningsbrættet, vil det være stimulerende for én gruppe af elever. Dette kan være en reference til, at eleverne indirekte er delt i de forskellige læringsstile, som Dunn og Dunn har udviklet. Her vil gruppen af taktile elever få et væsentligt behov opfyldt i en undervisning, hvis Ligningsbrættet spiller en central rolle. Han pointerer, at det ikke skal være den eneste måde ligninger bliver arbejdet med. Dette synspunkt kan bygge på en tanke om, at flere elever skal have opfyldt de væsentligste behov i deres læringsstil. Eksempelvis ved at arbejde kinæstetisk, hvor hele kroppen anvendes eller visuel, hvor man mest kan forstå gennem mentale billeder og skrift. For at imødekomme dette foreslår læreren nedenstående bud på en måde at organisere undervisningen (Bilag 7.1, afsnit 5):

Bo: Kunne det være en mulighed at sige, at nu starter vi på det her {med tavleundervisning hvor der indgår forklaringer på ligninger}, og vi har noget introduktion til det her, og så et par gange hen senere/ nu har vi lige et digitalt arbejds hjørne, vi har et boghjørnet, og så har sådan et praktisk hjørne derovre, nu vælger I selv.

Når denne planlægning af undervisning analyseres ud fra Bruners teori, vil det gå imod hans tre-stadie-teori. Dette skyldes, at tavleundervisningen vil indebære forklaringer på skrift og mundtligt, hvis det opbygges efter skolens matematikgrundbogs introduktion til ligninger. Tavleundervisningen vil højst sandsynligt være en del af stadie 2 og 3, da den typisk indeholder den visuelle og abstrakte del. De efterfølgende forskellige workshops, vil have det praktiske hjørne som vil indeholde Ligningsbrættet, hvilket er en del af stadie 1. Det boglige og det digitale hjørne vil begge indeholde dele fra stadie 2 og 3. Ifølge Bruner skal repræsentationerne bruges til at skabe en progression i matematikundervisning med start i konkrete materialer, over til visuelle opgaver og slutteligt at arbejde med symboler. Ud fra denne teori vil ideen om workshops ikke være ideelt til at undervise i ligninger, da den starter med det svære for efterfølgende at give eleverne mulighed for at tilpasse det til deres niveau.

Opsummerende kan det siges, at organiseringen af undervisningen vil afhænge af lærerens standpunkt. Hvis der arbejdes ud fra en progression i repræsentationer, vil det være fordelagtigt at arbejde med Ligningsbrættet først, for efterfølgende at gøre det visuelt og slutteligt arbejde med symboler. Hvis man derimod arbejder med læringsstile, vil det være oplagt at lade eleverne selv vælge en workshop, hvor matematikken bliver bearbejdet gennem den sans, der skaber den bedste læring for den enkelte.

Diskussion

I analyserne blev vi opmærksomme på, at der er mange faktorer, der har betydning, når man udvikler et materiale. Vi fandt desuden frem til, at der er mange parametre man skal overveje, når man bruger materialet i undervisningen. Gennem analyserne blev det tydeligt, at der findes forskellige typer af konkrete materialer, samt at man kan bruge forskellige arbejdsformer, når der arbejdes med materialet. Det vil vi i nedenstående uddybe og diskutere nærmere. Derudover vil vi diskutere kvaliteten af den kvalitative metode, vi har brugt i forbindelse med afprøvningen af materialet.

To typer konkrete materialer

Gennem diskursanalysen blev vi klogere på, at alle konkrete materialer falder i samme kategori, selvom de gennem deres udseende har forskellig virkning i undervisningen. Derfor vil vi i det følgende skelne mellem to typer af konkrete materialer:

1. Materialer fra hverdagen: Lagkage, pizza, æbler eller lignende
2. Matematikfremstillede materialer: centicubes, brøkbrikker, tændstikpinde, polygonbrikker eller lignende

Materialerne fra hverdagen har den fordel, at eleverne nemt kan relatere til dem. Alle ved hvad et æble er, og hvordan man kan dele det i lige store stykker. Problematikken ved at bruge disse materialer er, at elevernes samtaler let kan komme til at handle om alt muligt andet end matematik (Hansen, 2019, s. 194-195). Det betyder at læringen bliver mere diffus. Ydermere vil de stykker, man deler, heller ikke være helt præcist lige store, hvilket betyder, at der vil være et stykke, man foretrækker frem for andre. De matematikfremstillede materialer står i modsætning til dette. Deres fordel er netop, at det er matematikrelateret, og der er derfor ikke lige så stor sandsynlighed for, at samtalerne omhandler andre emner end matematik. Man kan derfor spørge sig selv om nogle typer

opgaver/materialer er mere rigtige end andre? Ifølge Bruner er et konkret materiale kendetegnet ved at være noget, der er handlingspræget. Begge typer materialer lever op til dette, og man kan på den måde ikke skelne mellem rigtigt og forkert. Ser man derimod nærmere på læringsudbyttet, er der en betydelig forskel på de to typer materialer. I litteraturanalyser fra Carbonneau m.fl. (Carbonneau, Marley, & Selig, 2013) viser det sig, at materialer fra hverdagen ikke er til gavn for elevernes læring. Faktisk kan det være et mere forstyrrende element i undervisningen, hvorimod matematikfremstillede materialer har en høj effekt på elevernes fastholdelse i arbejdet med det konkrete materiale. Sammenfattende kan man sige, at der ikke er et rigtigt og forkert konkret materiale, når man skal opfylde Bruners teori, men at der er en betydelig forskel i læringsudbyttet. Det afhænger af, om man arbejder med opgaver, hvor der indgår materialer fra hverdagen eller matematiske materialer.

Arbejdsformen i introduktionen til Ligningsbrættet

Efter at have set på forskellige typer af konkrete materialer, vil vi se nærmere på arbejdsformen når materialet anvendes. I den empiriske undersøgelse og analysen heraf blev det tydeligt, at der ikke var et entydigt svar fra lærerne, på om undervisningen skulle foregå på klassen eller i en lille gruppe af elever. Materialet er udarbejdet til hele klassen og er tænkt, som noget der kan arbejdes med i klasseundervisningen. Spørgsmålet er, om det er den bedste løsning. I det følgende vil vi derfor diskutere fordele og ulemper ved de to former for anvendelse af Ligningsbrættet i undervisning. De to lærere har de lidt forskellige holdninger til, hvad der vil være god anvendelse af materialet. Ifølge Bo vil den bedste løsning være at arbejde med det i forbindelse med værkstedsundervisning. Lis ser en fordel i, at alle elever arbejder med materialet på klassen, da man på den måde undgår, at elever fravælger et konkret materiale, fordi det er pinligt. Helt generelt er en af fordelene ved at arbejde med klasseundervisning, når eleverne skal have nogle faktuelle pointer. Samtidig er det en god måde at samle klassen om en fælles oplevelse eller gå ud fra et fælles afsæt (Mottelson, 2019, s. 84). I arbejdet med dette konkrete materiale kræver det ikke mange faktuelle pointer, før eleverne kan gå i gang med arbejdet. Der er enkelte regler, som er relevante at kende på forhånd og ellers lægger materialet op til, at man kan eksperimentere. Alligevel er materialet relevant at bruge i en classesammenhæng, for at give eleverne en fælles oplevelse af materialet. Det betyder, at

Ligningsbrættet ikke bliver opfattet som et hjælpemiddel, hvor eleverne kan blive pinligt berørte, men i stedet som et undervisningsmateriale.

Når man bruger materialet i værkstedsundervisning, kan eleverne selv vælge hvilken aktivitet, de ønsker at arbejde med. Herved kan man risikere, at eleverne fravælger værkstedet med det konkrete materiale i frygt for, at det er pinligt at bruge hjælpemidler. Begrundelsen for fravalget kan man kun gisne om, da det modsat kan være et udtryk for, at eleven har valgt et værksted ud fra sin læringsstil. Derfor vil værkstedsundervisning være en mulighed for at fordybe sig i den enkelte aktivitet, der passer eleven bedst. Endnu et argument for denne type undervisning er, at elevernes motivation for arbejdet øges ved at give dem valgmuligheder (Mottelson, 2019, s. 87).

I ovenstående bliver det tydeligt, at der er fordele og ulemper, uanset hvilken arbejdsform man vælger. Derfor vil valget af arbejdsformen afhænge af, hvilken lærer der bruger materialet i undervisningen. Et andet perspektiv man også kan se på fordele og ulemper ved, er ens valg af metode. I det følgende afsnit vil vi komme nærmere ind på, hvilke kvaliteter vores kvalitative metode har.

Kvaliteten af den indsamlede empiri

I arbejdet med metoderne er det relevant at forholde sig kritisk til ens udførelse. Derfor er det væsentligt at inddrage begreberne validitet og reliabilitet. Validiteten handler om, i hvor høj grad undersøgelsen måler det, som det var hensigten at måle, altså gyldigheden. (Reimer & Sortkær, 2017, s. 144-145). Undersøgelsens gyldighed har været høj, hvis man ser på interviewsituationen. Vi optog interviewet og transskriberede det efterfølgende, hvilket betød, at vi fik de præcise formuleringer fremfor, at vores hukommelse afgjorde, hvad vi mente eleverne sagde og tænkte (Bak, 2017, s. 64-65). I databehandlingen har vi kodet alle interviews i fuld længde, i modsætning til at udplukke, det vi fandt mest relevant. Det gør, at processen er så transparent som muligt. Et af de steder hvor validiteten halter, er tidsperspektivet. Eleverne fik mulighed for at arbejde med Ligningsbrættet i 20-25 min, hvilket ikke er tilstrækkeligt hvis man vil vurdere, om det kan bruges i den daglige klasseundervisning.

I den kvalitative undersøgelse var intentionen at finde ud af om materialet var brugbart, samt hvilken forståelse det gav eleverne. Derfor udarbejdede vi spørgsmål, hvor dette var i fokus. Gennem spørgsmålene og svarene gav eleverne udtryk for, at det gjorde det lettere for dem at arbejde med

ligninger, når de anvendte Ligningsbrættet (Bilag 6.2, afsnit 1). Derudover kunne vi observere undervejs, hvordan størstedelen af eleverne kunne finde ud af at bruge materialet (Bilag 5.2, afsnit 1-3). Samlet set er det med til at give en høj reliabilitet. Reliabilitet beskriver graden af målefejl i undersøgelsen og dermed troværdigheden (Reimer & Sortkær, 2017, s. 144-145).

Hvad man også skal være opmærksom på, er forskellen på færdighed og kompetence (Højgaard, 2008). Eleverne kan have færdigheder til at bruge materialet i den givne sammenhæng, men have svært ved at overføre det til andre sammenhænge. Derfor kan det være svært at sige noget om elevernes forståelse ved brug af materialet gennem undersøgelsen.

Andre faktorer, der har haft indflydelse på kvaliteten af undersøgelsen, er elevernes kendskab til, at vi havde udarbejdet materialet. Det kan have givet nogle usikkerheder, da vi interviewede dem. Eleverne skulle svare på om materialet var brugbart, og kan derfor have undladt nogle holdninger, fordi de ikke ville 'gøre os kede af det'. Det kunne vi have undgået ved at bruge en anden person som interviewer, eller ved ikke at have fortalt dem om udviklingen og oprindelsen af produktet. For det andet blev eleverne heller ikke spurgt ind til, om de havde lyst til at deltage, men blev blot valgt af lærerne. Derfor deltog de ikke på et frivilligt grundlag, hvilket også kan have en effekt på de resultater vi har fået (Bak, 2017, s. 64-65). På den anden side ville elever, der deltager frivilligt, måske have et større engagement for materialet end man ellers ville opleve i en normal klasse.

Derudover blev Lis og Bo interviewet sammen. Det betød, at Bo fik størstedelen af taletiden, mens Lis kun fik sagt noget ved meget få lejligheder. Det gjorde, at vi stort set kun fik holdninger til materialet fra Bo. Det kunne vi have undgået ved at interviewe de to lærere hver for sig. Desuden var det Lis, vi havde kontakt med inden besøget. Hun fik derfor en del information og blev sat ind i materialet på forhånd. Da disse informationer ikke gik videre til Bo, medførte det, at Bo ikke havde en forståelse af materialet inden og derfor ikke følte sig klædt på til at hjælpe eleverne (Bilag 7.2, afsnit 2).

Repræsentativiteten er værd at diskutere i forbindelse med undersøgelsen, fordi der ikke har været mulighed for at spørge alle i populationen (Reimer & Sortkær, 2017, s. 145). Her har vi forsøgt at gøre undersøgelsen repræsentativ ved at lave samme undersøgelse på to syvendeklasser. Der var udvalgt 4 elever til undersøgelsen i hver klasse, én højt-præsterende elev, to middel-præsterende elever og én lavt-præsterende elev. Her var hensigten, at de skulle repræsentere en classes niveauer

på bedst mulig vis. Alligevel kan vi ikke med garanti sige, at dette er tilfældet, da der er stor variation afhængig af den pågældende klasse.

Konklusion og handleperspektiver

Med tankerne på vores kommende profession som matematiklærere har vi i projektet undersøgt, hvordan man arbejder med repræsentationer i Singapore-matematik, og hvordan kvaliteterne fra dette kan danne grobund for udviklingen af et konkret materiale til ligningsløsning målrettet til udskolingselever. Det skyldes blandt andet, at vi gennem egne erfaringer har haft svært ved at finde konkrete materialer, der kan bruges til undervisningen i udskoling. Hovedformålet har derfor været at afdække, hvordan et konkret materiale til elever i udskoling kan udforme sig. Desuden har afprøvning af det med elever, medvirket til at vurdere om materialet er relevant at inddrage i undervisningen.

I første del af analysen blev det tydeligt, at der skal være en progression i opgaverne, for at det giver mening at arbejde med de tre repræsentationsformer. Det kræver, at man har en konkret repræsentation, der kan oversættes til en visuel og abstrakt repræsentation. Ydermere fremgår det af analysen, at der findes flere forskellige måder at lave konkrete materialer på. Med afsæt i denne analyse begyndte vi på udviklingen af et materiale, hvilket anden del af analysen belyser hvordan foregik. Dette var en iterativ proces, hvor vi udviklede materialet gennem en designprocesmodel. Her blev vi bevidste om, at det tager tid at udvikle et konkret materiale, som kan bruges meningsfuldt i undervisning. Der indgår mange faktorer, man skal overveje. Noget vi kom frem til gennem designprocessen og afprøvningen af materialet var, at eleverne skal arbejde med de samme fire farver centicubes. På den måde undgår man stor forvirring, når en elev sammenligner sit løsningsforslag med sidemakkeren, som kan opstå hvis farverne er forskellige.

Tredje og sidste del af analysen bestod af afprøvningen af materialet i en syvendeklasse. Her blev det tydeligt, at elevernes forståelse er svært at vurdere, fordi man ikke har indsigt i elevernes tankegang. Desuden fremgår det, at eleverne finder materialet brugbart i forskellige situationer. For nogle elever giver materialet mening, når man skal løse komplicerede ligninger. For andre er materialet med til at motivere eleverne, fordi det er sjovere end den metode, de er vant til at arbejde med.

Derudover gav interviewene et klart indblik i, at eleverne finder det lettere at arbejde med det konkrete materiale fremfor at arbejde med ligninger på et abstrakt niveau.

Ydermere fandt vi frem til, at der ikke er et entydigt resultat på, om et konkret materiale er særligt velegnet til lavt- eller højt-præsterende elever. Ifølge vores undersøgelse vil det egne sig bedst til højt-præsterende, mens det i en undersøgelse lavet af Boggan, Harper og Whitmires viser sig at være de lavt-præsterende elever, der har mest ud af arbejdet med konkrete materialer. Slutteligt bliver det i analysen tydeligt, at man kan arbejde med materialet på forskellige måder enten på klassen eller i en mindre gruppe. Derudover kan det konkluderes, at de konkrete materialer være særligt relevante for elever, der har en taktile læringsstil i modsætning til elever med andre læringsstile.

Gennem diskussionen fremgår det, at der findes to forskellige typer konkrete materialer. Den ene med udgangspunkt i hverdagsting og den anden med udgangspunkt i matematiske materialer. Fælles for begge er, at de hører under kategorien konkrete materialer. Hvad der derimod er forskelligt ved at bruge de to typer af materialer, er elevernes læringsudbytte. Ved at bruge matematiske materialer undgår man, at elevernes samtaler drejer sig om hvilken hund der er sødest eller hvilken pizza der er størst. Derfor er brugen af matematiske materialer en klar fordel, hvilket vi har brugt til Ligningsbrættet, hvor der blandt andet indgår centicubes.

Ydermere diskuteres det om undervisningen skal foregå som en del af klasseundervisningen eller som værkstedsundervisning. Her bliver det tydeligt, at fordelene ved klasseundervisning er, at det giver eleverne en fælles oplevelse, hvor materialet ikke bliver set som et hjælpemiddel, men som et undervisningsmateriale. Værkstedsundervisningen tilgodeser, at eleverne lærer på forskellige måder og kan herigennem medvirke til, at eleverne er mere motiverede for at arbejde med det konkrete materiale. Når vi kigger på arbejdsformen, kan det konkluderes, at en mulig løsning kan være at anvende begge typer af organisering, når Ligningsbrættet inddrages i undervisning. Således introduceres alle eleverne til materialet, når der arbejdes med det første gang. På den måde får alle elever kendskab til materialet, og materialet bliver medbragt som et undervisningsmateriale i modsætning til, hvis det blev introduceret som et hjælpemiddel. Efterfølgende vil det være muligt at bruge det i en værkstedsundervisning. Her vil nogle elever formentlig vælge arbejdet med Ligningsbrættet, fremfor aktiviteter som giver adgang til at arbejde visuelt og abstrakt med ligninger.

Slutteligt diskuteres kvaliteten af den kvalitative metode, her blev vi blandt andet opmærksomme på, at der er forskel på at måle færdigheder og kompetencer, hvorfor det kan have været svært at måle på elevernes forståelse.

Med dette projekt er vi blevet bevidste om, at udviklingen af et materiale er en længere proces, særligt hvis det skal kunne bringe kvalitet ind i undervisningen. Ydermere er det blevet klart, at brugen af konkrete materialer kræver den rette stilladsering og arbejdsform, for at kunne bidrage til elevernes relationelle forståelse. Herunder skal det indtænkes at konkrete materialer skal være en del af en varieret undervisning. Selvom det som nævnt er komplekst, håber vi, at projektet kan inspirere andre matematiklærere til at udvikle et materiale eller inddrage konkrete materialer i deres undervisning i udskolingen.

Perspektivering

I vores projekt har vi udviklet et materiale gennem en designproces med henblik på at løse et komplekst problem. Problemet var i dette tilfælde manglende konkrete materialer til udskolingen, men designtilgangen er også relevant at bruge i andre sammenhænge. Tilgangen er relevant, når man som lærer skal udvikle sin undervisningspraksis. Dette er en arbejdsopgave, som man forventer, at en professionel lærer udfører løbende (Danmarks lærerforening, u.å.). En udfordring er, at man som lærer kan blive fastlåst i sit eget syn på praksis, hvorved man glemmer at være reflekterende i de valg man træffer. I en designproces er refleksionerne en naturlig del af de handlinger, man foretager sig. Igennem processen vil man udvikle teori til den situation, der behandles (Schön, 2001, s. 67). Denne reflekterende kompetence er relevant som kommende lærer i et skolesystem, der er under konstant udvikling. I refleksionen over vores arbejde er vi blevet opmærksomme på, at vi har haft fokus på at udvikle materialet til en "almindelig" klasse. Her kunne man også have haft overvejelser om en anden målgruppe, f.eks. elever med særlige behov. Ser man det i en sammenhæng med designprocessen, vil kravene til produktet ændre sig. Her kunne et krav være, at opgaverne skal have et diagnostisk fokus. Med det mener vi, at opgaverne ikke kan løses korrekt, hvis ikke man har forståelse for opgaven. Ved at eleverne anvender materialet til at løse diagnostiske opgaver, vil det give læreren mulighed for at se, hvor deres vanskelighed ligger, og dermed give læreren indblik i, hvad der kan arbejdes videre med.

Litteraturliste

- Bak, C. K. (2017). Kvalitative interviews som metode i pædagog- og læreruddannelsen. I T. T. Engsig, *Kvalitative interviews som metode i pædagog- og læreruddannelsen* (s. 47-72). Hans Reitzels Forlag.
- Børne- og undervisningsministeriet. (2022). *Folkeskolens formål*. Hentet fra UVM: <https://www.uvm.dk/folkeskolen/folkeskolens-maal-love-og-regler/om-folkeskolen-og-folkeskolens-formaal/folkeskolens-formaal>
- Boström, L., & Schmidt, S. (2011). *Læringstile*. Munksgaard Danmark.
- Bruner, J. S. (1972). *Bidrag til en undervisningsteori*. Gyldendals Pædagogiske Bibliotek.
- Bull, A., & Blankholm, T. (2023). Udvikling af matematik gennem tre typer af repræsentationer [under udgivelse]. Forlaget MATEMATIK.
- Carbonneau, K. J., Marley, S. C., & Selig, J. P. (2013). A Meta-Analysis of the Efficacy of Teaching Mathematics With Concrete Manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, 105(2), s. 380-400.
- Cockett, A., & Kilgour, P. W. (2015). Mathematical Manipulatives: Creating an Environment for Understanding, Efficiency, Engagement, and Enjoyment. *TEACH COLLECTION of Christian Education*, 1(1), s. 47-54.
- Danmarks lærerforening . (u.å.). *Professionel dømmekraft*. Hentet fra Danmarks Lærerforening: https://www.dlf.org/media/12303234/den-professionelle-laerer_pjece.pdf
- d.Schools Stanford. (u.å.). *dschool.stanford.edu*. Hentet fra An Introduction to Design Thinking: https://drive.google.com/file/d/10B7JVKJ2N5R1K_Mve1Wfrux3IkSCmbUH/view
- Egelund, N. (2011). PISA (Programme for International Student Assessment) - 2009. *MONA*(1), s. 58-65.
- Gibbs, G. (2007). Thematic coding and categorizing. I G. Gibbs, *Analyzing Qualitative Data* (s. 38-55). London: SAGE Publications Ltd.
- Hansen, R. (2019). *Matematikdidaktik - Mellem fag og didaktik*. Hans Reitzels Forlag.
- Har, Y. B. (20. februar 2019a). *Yeap Ban Har 5 Key Learning Theories behind Think Mathematics*. Hentet fra YouTube: [Yeap Ban Har 5 Key Learning Theories behind Think Mathematics](https://www.youtube.com/watch?v=IrtDLr3pwAg)
- Har, Y. B. (20. februar 2019b). *Yeap Ban Har Low Floor High Ceiling Tasks in Think Mathematics*. Hentet fra YouTube: <https://www.youtube.com/watch?v=IrtDLr3pwAg>
- Højgaard, T. (2008). Kompetencer, færdigheder og evaluering. *MATEMATIK*(6), s. 43-46.
- Hårbøl, K., Schack, J., & Spang-Hanssen, H. (2020). *denstoredanske.dk*. Hentet fra konkret: <https://denstoredanske.lex.dk/konkret>
- Iversen, O. S., Dindler, C., & Smith, R. C. (2019). *En designtilgang til teknologiforståelse*. Dafolo A/S.
- Jakobsen, M. R. (2011). *Fokusgrupper for begyndere - En praktisk håndbog* (2. udgave udg.). Frydenlund.
- Jóelsdóttir, L. B., Sunde, P. B., Pedersen, P. L., & Drejer, K. (2022). *T-MAT i fjerde: FÆLLESBOG* (3. udgave udg.). VIA University College.

- Kaur, B., Soh, C. K., Wong, K. Y., Tay, E. G., Toh, T. L., Lee, N. H., . . . Tan, L. C. (2012). Mathematics Education in Singapore. I S. J., *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Springer Open.
- Lembcke, S., & Pilgaard, M. (2020). Designprocesser på læreruddannelsen. I S. Lembcke, & C. A. Schultz, *Lærer under designprocesser - digital fabrikanten og designprocesser i FabLab* (s. 234-243). Dafolo A/S.
- Mottelson, M. (2019). *Almen undervisningskompetence*. Hans Reitzels Forlag.
- Munkøe, M. (2018). *Danmark er et service- og videnssamfund*. Hentet fra Dansk erhverv: <https://www.danskerhverv.dk/siteassets/mediafolder/dokumenter/01-analyser/analysenotater-2018/analysenotat---danmark-er-et-service--og-videnssamfund.pdf>
- Pedersen, K. O. (2011). *Konkurrencestaten*. Hans Reitzels Forlag.
- Petropouleas, E., CFU Absalon, Sehested, M. v., CFU KP, Holler, M., & CFU UCN. (2022). *emu.dk*. Hentet fra Divergent og konvergent tænkning: <https://www.emu.dk/grundskole/teknologiforstaaelse/begrebsguide-til-teknologiforstaaelse/divergent-og-konvergent?b=t5-t21-t115>
- Pind, P. (2022). *Algebra for alle*. Forlaget Pind og Bjerre.
- Reimer, D., & Sortkær, B. (2017). Spørgeskemaundersøgelsen og kvantitative metoder. I T. T. Engsig, *Empiriske undersøgelser og metodiske greb* (s. 135-160). Hans Reitzels Forlag.
- Schön, D. A. (2001). *Den reflekterende praktiker. Hvordan professionelle tænker, når de arbejder*. Klim.
- Schmidt, C. H. (26.. april 2022). *laeremiddel.dk*. Hentet fra Diskursanalyse: <https://laeremiddel.dk/viden-og-vaerktoejer/videnskabsteori/videnskabelige-metoder/diskursanalyse/>
- Schmidt, J. R. (2017). Dokument- og diskursanalyse. I T. T. Engsig, *Empiriske undersøgelser og metodiske greb* (s. 75-101). Hans Reitzels Forlag.
- Sjøgren, K. (12.. november 2018). *Kan metode fra Singapore gøre danske børn skarpe til matematik?* Hentet fra Videnskab.dk: <https://videnskab.dk/kultur-samfund/kan-metode-fra-singapore-goere-danske-boern-skarpe-til-matematik/>
- Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*(77), s. 20-26.
- Sunde, P. B., Jóelsdóttir, L., & Pedersen, P. L. (2020). Blokmodellen: en overset repræsentation i dansk matematikundervisning? *MONA*(2), s. 23- 46.
- Sunesen, S. M. (2020). *Sådan laver du undersøgelser - videnskabsteori, metode og analyse*. Hans Reitzels Forlag.
- Undervisningsministeriet. (2007). *Danmark som videnssamfund - mod nye mål og udfordringer*. Hentet fra Static UVM: <http://static.uvm.dk/publikationer/2007/livslanglaering/kap02.html>
- UNDP's nordiske kontor, Globale Gymnasier og VerdensKlasse, & Mellempfolkeligt Samvirkes. (u.å. a). *verdensmaalene.dk*. Hentet fra HVAD ER FN'S VERDENSMÅL FOR BÆREDYGTIG UDVIKLING?: <https://www.verdensmaalene.dk/fakta/verdensmaalene>

- UNDP's nordiske kontor; Globale Gymnasier og VerdensKlasse; Mellemlfolkeligt Samvirke. (u.å. b). *verdensmaalene.dk*. Hentet fra MÅL 12: ANSVARLIGT FORBRUG OG PRODUKTION: <https://www.verdensmaalene.dk/maal/12>
- VIA University Collage. (u.å.). *via.dk*. Hentet fra TRACK: Forskning i matematik i 4. til 6. klasse: <https://www.via.dk/forskning/paedagogik-og-dannelse/matematik-og-naturfagsdidaktik/track>
- Yoong, W. K., & Hoe, L. N. (2009). Singapore Education and Mathematics. I W. K. Yoong, L. P. Yee, B. Kaur, F. P. Yee, & N. S. Fong, *Mathematics Education: The Singapore Journey* (s. 13-47). World Scientific Publising Co. Pte. Ltd.
- Østergaard, C. (2017). Observation i pædagogiske kontekster. I T. T. Engsig, *Empiriske undersøgelser og metodiske greb - Grundbog til de pædagogiske professionsuddannelser* (s. 27-45). Hans Reitzels Forlag.

Bilag

Bilag 1: Indholdsfortegnelse af kapitel i T-MAT i fjerde: FÆLLESBOG

Siden her er gengivet med tilladelse fra TRACK-gruppen. De må IKKE kopieres til brug i undervisning uden tilladelse.

INDHOLD

LIGNINGER

Begrebsforståelse

I fokus	152
Modul 1: Regneudtryk og lighedstegnet	153
Modul 2: Ligevægt	156
Modul 3: Den ubekendte	159
Modul 4: Mønstre	163

Ligningsløsning - uformelle metoder

I fokus	167
Modul 1: Konkrete materialer og tallinjen	168
Modul 2: Gæt og prøv-metoden	174
Modul 3: Gæt og prøv-metoden i regneark	176

Problemløsning

I fokus	179
Modul 1: Fra regnehistorie til en ligning	180
Modul 2: Det hemmelige tal	184

Bilag 2: Fordeling af opgaver på baggrund af repræsentationsformer

Antal opgaver i alt, hvor der indgår mindst én repræsentationsform: 46		
Konkrete opgaver	Visuelle opgaver	Symbolske opgaver
<u>Optælling:</u> 7 opgaver <u>Procentdel:</u> $\frac{7}{46} \cdot 100 = \frac{350}{23} \approx 15,22 \%$	<u>Optælling:</u> 18 opgaver <u>Procentdel:</u> $\frac{18}{46} \cdot 100 = \frac{900}{23} \approx 39,13 \%$	<u>Optælling:</u> 21 opgaver <u>Procentdel:</u> $\frac{21}{46} \cdot 100 = \frac{1050}{23} \approx 45,65 \%$

Bilag 3: Konkret opgave fra T-MAT i fjerde: FÆLLESBOG

Siden her er gengivet med tilladelse fra TRACK-gruppen. De må IKKE kopieres til brug i undervisning uden tilladelse.



VI UDFORSKER

De 3 tøjdyr vejer det samme som 1 lod på 6 kg



Hvad betyder det, at der er ligevægt?

Hvad vejer et tøjdyr?



Bilag 4: Undersøgelse af materialer fra CFU

Antal materialer i alt for udskoling: 25				
Kategori	Geometri	Algebra	Statistik	Andet
Antal	6	1	2	15

Bilag 5: Observationer fra 7.X og 7.Y

Bilag 5.1: Observationer fra 7.Y

Fokusområde	Nr.	Observationer
Elevernes reaktion på materialet	1	Eleverne går i gang. De går først til QR koden, men bliver bedt om at lave første opgave først.
	2	Flere af dem prøver imens de ser videoen at rykke på snoren, men den er svær at rykke. De rykker kun foroven.
	3	Eleverne sætter centicubes på deres tavle imens de de ser videoen, så de tager de samme farver som på videoen. Måske de andre gør det for den første som starter med at se videoen gør det.
Forståelse	4	Alle eleverne rækker hånden op (en efter en) for at spørge om hjælp. Alle elever får hjælp til at vide at +1 og -1 kommer til at blive nul, så derfor må man gerne flytte dem af brættet.
Samarbejde	5	Eleverne blev præsenteret for hvilke opgaver der skal laves alene og hvilke der er samarbejde."Hvad hvis man ikke er færdige på samme tid?" <ul style="list-style-type: none">- Eleverne endte ikke med at samarbejde to og to, de lavede det individuelt.
Andet	6	Der er fejl i opgave 3 - Elever regner samme opgave som opgaven tidligere, så de ender med at regne det samme igen.
	7	Der var en elev som kom til opgave 5.

Ændringer i introduktionen ved anden afprøvning

Samarbejdet blev pige-pige og dreng-dreng

- Vi vidste ikke hvem der ved høj/middel/lav i niveau, så det blev lavet ud fra eleverne skulle turde at lave gruppearbejde.

Der blev snakket samlet om hvad det betød at der stod $+1$ og $-1 = 0$. For at det ikke skulle forklares senere, for hver elev.

Bilag 5.2: Observationer fra 7.X

Fokusområde	Nr.	Observationer
Elevernes reaktion på materialet	1	Nogle af de otte elever laver med på brættet mens det bliver gennemgået i videoen.
	2	Eva(middel): Hun ser videoen og har valgt nogle andre farver end dem i videoen eller på billedet. Da hun skal lægge det op som hun ser på billedet i opgave 2, spørger hun om hjælp. Hun ved ikke hvordan det skal lægges op. Hun får tips til det og lykkes med det efterfølgende uden at ændre i hendes valg af farver. Hun spurgte efter at have sæt videoen Hvorfor sætte hun den på nummer 2? (I videoen sætter centicuben på plads nummer fra venstre side)
	3	Jane (middel): Sidder i lang tid og kigge på Ligningsbrættet og ser video og kigger på brættet igen, før hun går i gang med at arbejde med opgaverne.
Forståelse	4	Finn (lav) siger til makker Max (høj): "Jeg fatter fuldstændig hat" Max (høj) hjælper: "Du skal forklare at det giver 5" Han forklarer igen at $+1$ og $-1 = 0$, så de kan gå ud. Han tager det væk med hænderne på makkerens plade. "Se nu giver det $x = 5$. Gul er x og der er fem blå som er 1"
	5	Elev Max og Finn går i gang med at lave opgave 3. Max fører an i at de lægger ligningen op på Ligningsbrættet. Han spørger "Ved du hvad jeg mener" Finn: "Nej" Max forklarer igen hvad de gør
	6	Finn i opgave 4a) : "Jeg skal lige fatte hvordan det skal lægges op" (Hvordan hans skal se ud med andre farver brikker end dem Max bruger) Max: Han hjælper med at lægge det op. Bagefter går han i gang med at løse ligningen. → Fin: "Prøv lige at vent, men x er blå" (Han skiftes hans centicubes ud) Max: "Hov jeg mangler en grøn" Efter at have løst ligningen er de ikke endt med at have samme resultat. De spørger efter hjælp. Hverken Max eller Finn havde lagt ligningen rigtigt op med deres farver.
Samarbejde	7	Drengene snakker sammen om opgaverne.
	8	Pigerne samarbejder også efter noget tid.

Kodning af gruppeinterview med de 4 elever fra 7.X og 7.Y

Skema der beskriver de forskellige tegn, der indgår i kodningen:

Tuborg parenteser {}	Tuborg parenteser bruges, når der i transskriptionen skrives forklaringer eller uddybninger til det, der blev sagt.
Almindelige parenteser ()	Beskrivelse af elevernes stemmeføring, da det nogle gange kan have flere betydninger, hvis man blot læser det. F.eks. Mmm, der både kan være, hvis man tænker over noget eller ja, som at man bekræfter, det der bliver sagt.
Firkanterne parenteser []	Når der er observeret noget, som ikke kan høres.
Skråstreger /	Angiver, at talerens sætning afbrydes og/eller reformulerer sig. Markerer også pause.
Markeret med gråt	Eleverne bliver forstyrret og taler om ting, der ikke er relevante for undersøgelsen. Det kan f.eks. være når andre elever kommer ind i rummet, fordi der er ved at være frikvarter.

Den fulde transskription af alle interviewes kan sendes ved efterspørgsel til mail: 294133@via.dk

Bilag 6.1: Kodning efter forståelse

Afsnit	Interview udklip	Sammenfatning	Nøgleord	Kategori
1	<p>Elever har givet arbejdet med materialet mellem 1-5 stjerner. Eleverne gav det mellem 2-4 stjerner.</p> <p>Interviewer: Bare i orden. Hvorfor tænkte I lige på det tal?</p> <p>Nora: Jeg synes det var lidt svært, men alligevel så var det sådan lidt lettere end normalt.</p> <p>Interviewer: Okay. Hvad var det, der gjorde det?</p> <p>Nora: Det var sådan, man skal lige finde ud af, hvordan det fungerede?</p>	Samtalen handler om at materialet kan være svært at forstå i starten.	Begyndelsen af arbejdet	De typiske
2	<p>Interviewer: Ja. Har I andre noget?</p> <p>Rene: Jeg synes det var fint nok nemt at forstå, og det gjorde det meget simpelt.</p> <p>Interviewer: Det gør det meget simpelt, okay.</p>	Samtalen handler om at det for en elev blev mere simpelt efter anvendelse af materialet.	Stor/god forståelse af materialet. Bedre forståelse	De modsigende
3	<p>Interviewer: Hvad tænkte I? [henvender sig til Eva og Jane]</p> <p>Jane: Altså jeg synes det var nemt nok, når man sådan havde forstået det, men i starten, der fattede jeg ingenting.</p> <p>Eva: Ja (stille bekræftende ja)</p> <p>Interviewer: Hvad hjalp så til at I forstod det?</p> <p>Jane: Bare sådan tænke over det, da jeg havde tænkt over det i lang nok tid, så forstod jeg det.</p> <p>Eva: Se videoen igen</p>	Hovedpointen er at elevernes forståelse udvikler sig ved at bruge tænketid samt se videoen igen	Tænketid og se video igen	De, der dækker variationerne

4	<p>Interviewer: Ja. Har I andre noget? Adam: Jeg synes bare, det var lidt svært at forstå. Når jeg så fik lidt hjælp, så var det nemt nok. Interviewer: Så var det nemmere. Nora: Ja, Jeg tror også at det er sådan. Det var lidt svært at forstå i starten og at komme i gang og så var det nemt nok.</p>	<p>Eleverne giver begge udtryk for at det var svært i starten, men ved at få hjælp eller komme i gang med det, synes eleverne det var lettere</p>	<p>Hjælp, komme i gang. Forskellige måder at få forståelse.</p>	<p>De, der viser forskelle ved fællestræk</p>
---	---	---	---	---

Bilag 6.2: Kodning efter anvendelse af materiale

Afsnit	Interview udklip	Sammenfatning	Nøgleord	Kategori
1	<p>Interviewer: I nikker. Hvis I nu en anden gang skulle arbejde med ligninger, ville I så tænke, at man kan bruge den her [peger på Ligningsbrættet] eller ville gøre det på den måde, som vi plejer at gøre det? Nora: Jeg tror faktisk, at jeg gerne vil gøre det på den her måde. Det blev lidt lettere. Rene: Det ville jeg også. Interviewer: Hvorfor ville I gerne det? Iben: Det er bare sådan.... Det er også lidt sjovere. Interviewer: Ja, er det fordi man kan rykke rundt på noget at det bliver sjovere? Eller fordi det er anderledes end det man plejer. Iben: Mmhh (bekræftende) {blev sagt som svar på spørgsmålet: er det fordi man kan rykke rundt på noget at det bliver sjovere?} Iben: Det er også anderledes noget. Interviewer: Det var anderledes. Rene: Det er også nemmere, hvad skal man sige, at kunne se det for sig når de ligger på / brikkerne, end hvis det bare er tal på et papir eller det lægger op i hovedet.</p>	<p>Her fortæller eleverne, at de tror de vil bruge materialet, hvis de skal løse ligninger. Eleverne kommer med kort begrundelse for hvorfor de vil bruge det.</p>	<p>Brug af materiale Sjov og anderledes</p>	<p>De typiske</p>
2	<p>Interviewer: Hvis I nu en anden gang skulle arbejde med ligninger. Nu fokuserer vi lige og så er det lige meget med ham. Hvis nu at I en anden gang jeg skulle arbejde med ligninger, vil I så tænke at I ville bruge det her? Eller ville I gøre det på den måde, som I plejer at gøre det? Finn: Halv/halv Max: Altså ja, til nogle af de sådan mere enkle, der vil jeg nok bare bruge hjernen. Men det der er sådan lidt mere kompliceret, der vil jeg nok bruge den der. Finn: Lige nemlig Interviewer: Okay, det var også det du tænkte. I nikker [henviser til Eva og Jane]</p>	<p>Samtale om eleverne vil bruge materialet. En elev forklarer, hvornår kan vil bruge det.</p>	<p>Komplicerede ligninger, halv/halv anvende materiale eller velkendt/"gamle" metode.</p>	<p>De mest indsigtfulde</p>

3	<p>Interviewer: Var der nogle tidspunkter, hvor I tænkte den her opgave med det her bræt? Det forstår jeg altså ikke. Det giver ikke mening at bruge brættet til den her opgave? Iben: Neej (stille) Rene: Mmhhh (tænkende) Interviewer: Du tænker på noget? Rene: Den her, den kunne jeg godt gøre sådan rimelig nemt i hovedet [peger på opgave 3]</p>	Samtale om at bruge Ligningsbrættet til "nemme" opgaver.	Overflødig at bruge Ligningsbrættet	De modsigende
4	<p>Interviewer: Hvad tror I, de andre, de har også arbejdet lidt med det? Hvad tror I de tænker om det? Eller hvis I skulle præsentere det til nogle andre, tror I de ville forstå det. Iben: Altså jeg tror det er lidt lettere når man sidder sådan ude i en gruppe. Fordi der er mere hjælp og sådan noget? Interviewer: Okay. End hvis man gjorde det på hele klassen? Iben: Ja</p>	Samtale om hvordan Ligningsbrættet ville skulle introduceres	Arbejdsform. Grupperarbejde	De, der dækker variationerne
5	<p>Interviewer: Hvad er de mere komplicerede {ligninger}? Jane: Altså med mange tal Eva: Mange tal. Interviewer: Ja, okay. Max: Minus, plus, og x og sådan minus x og for eksempel ligesom den der. (peger på opgave 4) Interviewer: Så den der i opgave 4? a) $2 \cdot x - 3 = 7$ b) $-4 * x - 8 = 24$ Max: Ja det a'eren og b'eren der. De er sådan lidt svære at have i hovedet. Interviewer: Ja, så er det bedre at man lige kan bruge den der [peger på Ligningsbrættet] Max: Mmmm, Lige præcis.</p>	Samtale hvor eleverne i fællesskab beskriver, hvad komplicerede ligninger er.	Komplicerede ligninger	De, der viser forskelle ved fællestræk
6	<p>Interviewer: Hvad tror I, at andre vil tænke om det? [henvender sig til Eva og Jane] Jane: Jeg tror, at det ville være en god måde, at lære, at lave ligninger på. Interviewer: Ja. Så man skulle have det hele i starten. Eva og Jane: Mmmm (bekræftende) Interviewer: Ja. Okay. Og så skulle man starte med nogle helt simple nogle {ligninger}? Eva: Ja det er nok lidt svært at lave nogen, hvis man skal regne med 100'er. Så skal man lave sådan en sygt mange 10'er-stænger?</p>	Samtale om at Ligningsbrættet skulle anvendes når ligninger introduceres.	Ligningsbrættet første gang man møder ligninger.	

Afsnit	Interview udklip	Sammenfatning	Nøgleord	Kategori
1	<p>Interviewer: Når I tænker på det undervisning I har haft sammen med Lis og Bo, når I har lavet ligninger og så det vi har lavet nu. Kunne I mærke, at der var nogen forskel?</p> <p>Max: Det var sådan nemmere at se det for sig.</p> <p>Finn: JA {afbryder ham der snakker for at bekræfte med høj stemme}</p> <p>Max: Fordi det stod der ikke bare sådan med skrift. Det er ligesom det stod der, så du kunne rykke rundt på, det der stod der.</p> <p>Interviewer: Ja, man kunne rykke rundt på det, og man kunne se det på billedet. Hvad tænkte I? [henvender sig til Eva og Jane]</p> <p>Jane: Altså også det der med at man kan se det for sig. Altså sådan, det er svært at finde ud af inde i hovedet.</p> <p>Eva: Ja, det er nemmere at holde styr på sådan.</p>	Samtale om hvorfor der er forskel på at lave ligninger uden og med Ligningsbrættet. Primære forskelle -	Rykke rundt på (konkret) Se det for sig (visuel) Find ud af inde i hovedet (akstrakt)	De typiske
2	<p>Interviewer: Hvorfor ville I gerne det? {her henvises til at eleverne gerne vil bruge Ligningsbrættet til at løse ligninger}</p> <p>Iben beskriver sin forklaring først</p> <p>Rene: Det er også nemmere, hvad skal man sige, at kunne se det for sig når de ligger på / brikkerne, end hvis det bare er tal på et papir eller det lægger op i hovedet.</p>	En elev beskriver at han gerne vil løse ligninger med Ligningsbrættet, fordi man kan se det og ikke har det på et papir eller i hovedet.	Repræsentationer: konkret og visuel ift. visuel og abstrakt	De mest indsigtfulde
3	<p>Interviewer: Hvordan kan du mærke, at det gav en anden forståelse? {en anden forståelse af ligninger i forhold til det eleverne har arbejdet med i undervisningen med deres almindelige lærere}</p> <p>Eva: Det ved jeg ik, sådan. Man kan se det sådan lidt bedre. Sådan at man kan rykke rundt og alt det der.</p> <p>Jane: Jeg synes det blev lidt mere sådan enkelt.</p> <p>Interviewer: Ja, du synes, det blev mere enkelt. Fordi at man kunne rykke rundt på det?</p> <p>Finn: Jeg følte bare mere, at jeg kunne se det for mig.</p> <p>Interviewer: Du kunne se det for dem. Hvad siger du, Max?</p> <p>Finn: Gå væk med dig rytteren.</p> <p>Max: Det der med, at man sådan kan fjerne det, og så på den ene side er der en ting. Og så på den anden er der sådan 5. Det gør det også sådan lidt nemmere. Ryttere går væk med sig.</p>	Samtalen handler om hvordan dette materiale har været ift. eleverne almindelige undervisning, hvor eleverne forklare at det er mere tydeligt at arbejde med Ligningsbrættet	Konkret og visuel	-
4	<p>Interviewer: Der var en opgave, hvor man så skulle tegne det over på en vægt. Hvad tænkte I om den opgave?</p> <p>Nora: Jeg synes faktisk det var meget fint.</p>	Samtale om opgave hvor en ligning skal	Vægten. Forståelse på	De modsigende

<p>Interviewer: Det var meget fint Iben: Jeg forstod den ikke helt i starten, men så når det var {at man havde arbejdet lidt}, så var den ret let.</p>	<p>tegnes visuelt på en vægt.</p>	<p>grund af visuel?</p>	
--	-----------------------------------	-------------------------	--

Bilag 7: Kodning af lærerinterview

Bilag 7.1: Kodning efter stilladsering af Ligningsbrættet

Afsnit	Interview udklip	Sammenfatning	Nøgleord
1	<p>Bo: Er det her? Er det noget man skal bruge på sådan en klasseundervisning, eller er det noget man skal bruge sådan en eller anden form for, ikke ekstra, jo man kunne kalde det en form for ekstra undervisning, altså sådan lidt mere holdundervisning for nogen der har svært ved det? Interviewer 1: Altså jeg tror vores drøm er, at det ville være sådan til alle, fordi at vi tænker det kan hjælpe alle. Men det kan godt være i praksis, så ender det med, at der er så mange ting i det, at det ville være bedre at gøre det bare for nogle, ekstra opgaver i det? Bo: Ja (Bekræftende)</p>	<p>Samtalen handler om materialet skal bruges i en hel klasse eller støtteundervisning.</p>	<p>Klasseundervisning vs. støtteundervisning</p>
2	<p>Bo: De kan bruge en masse tid på, altså / hvis de skal forstå det her. Hvorfor så ikke reducere i komplikationerne og så sige. {Bo banker i bordet 4 gange} 4 bunker. / Hvis de skal lære noget. Hvorfor skal det så stå i vejen for læringen? {at eleverne selv skal til at vælge farver og inddele i fire bunker} Interviewer 2: Mmm (bekræftende) Interviewer 1: Vi havde først tænkt, at det skulle, at man skal kunne vælge farver, for at det skulle være mere bæredygtigt, for at så, alle skoler har centicubes, men hvis alle skal bruge rød som plus en, så kan det godt være, der ikke er nok rød. Bo og Lis: Mmm (bekræftende) Interviewer 1: Men efter i dag, så er jeg ret sikker på, at vi skal vælge om, altså, nu tager vi bare rød, og sådan er det, og så er alle eksempler med det. Bo: Komplexitetsreduktionen, synes jeg er vigtigt her.</p>	<p>Samtale om lærerens forslag til at gøre materialet mere simpelt, ved at reducere lidt i kompleksiteten.</p>	<p>Kompleksitetsreduktion i forhold til farver.</p>
3	<p>Bo: Når I nu, hvis man skulle lave det her. I stedet for man sidder enkeltvis og laver det. Kunne man godt have gjort det her i en tremands-gruppe? Interviewer 2: Jo. Bo: Så siger I, her har I 4 farver. I sætter jer derovre. I er 3 styks. I er 3 styks. I er 3 styks. Sådan at, når jeg kigger derind. Jeg sad til sidst bare og observerer og skrev ned. Hvor mange der tuner ud, fordi de ikke forstår det. Kunne man have undgået, at skulle være blæk-sprutte alt for mange steder? Måske jeg havde bedt dem om at lave det i en gruppe. Lis: Men kommer man ikke tit ud for, I en 3-mands-gruppe, at der er en, som ikke laver noget, der bare er observatør. Interviewer 2: Det kan være.</p>	<p>Samtale om hvordan undervisningen kan organiseres med eksempelvis gruppearbejde med roller.</p>	<p>Gruppearbejde, roller</p>

	<p>Interviewer 1: Ja, det kan man ende med i alle grupper, synes jeg.</p> <p>Bo: Jamen altså 4 er for mange. Øøøh 2 der kan det godt gå i stå, hvis ikke nogen rigtig forstår noget, men 3 så kunne man måske også begynde at arbejde med nogle roller. Med at man hører videoen. Og så er der én, som så skal sørge for at fortælle. Jeg har hørt det her og det her. Én skal være sådan, skal være spørgende. Én skal være analyserende. Så man kan arbejde med de muligheder, fordi kan man så forstå den? Jeg tror, man gør det nemmere som lærer.</p> <p>Interviewer 2: Jaer.</p>		
4	<p>Bo: Introduktionsvideoen, altså, den hørte jeg ikke. Kunne man have taget den på klassen til at starte på.</p> <p>Interviewer 2: Det kunne man godt.</p> <p>Bo: Hvad vil det? Vil det give noget?</p> <p>Interviewer 1: Ja måske.</p> <p>Interviewer 2: Altså fordelen ved at tage det på klassen, det er ligesom, at alle får set den ordentligt, det kommer igennem. Vi kan stoppe den, hvis der er noget, der er svært eller sådan nogle ting. Ulempen er, at du ikke kan gå tilbage i den.</p> <p>Interviewer 1: Altså så skal de i hvert fald have udleveret.</p> <p>Interviewer 2: Nogen der stopper det undervejs, og så sætter det på og så afspiller igen.</p> <p>Bo: Ja, men hvis de hører det først alle sammen. Og så sige, nu må I gerne gå ud og arbejde i grupper. I scanner lige ind {henvisning til QR-koden}, og så må I gerne høre den forfra. Og så tage den, altså slavisk derfra. Kunne det et eller andet sted give et fælles afsæt?</p> <p>Interviewer 2: Ja, det kunne det godt</p>	Samtalen handler om fordele og ulemper ved at lave en samlede introduktion til Ligningsbrættet ved hjælp af introduktionsvideoen	Introduktion, klasesamtale, QR-koder
5	<p>Bo: Men det der med at være vanebryder, det er jo virkelig godt. Altså det skaber noget i vores hjerner. Men kunne det noget, kunne man køre det sideløbende til noget andet. Altså nu har I det her. Det er én måde at gøre det på, og så kan man lave noget på en anden måde. Altså man skal jo aldrig kun gøre det på en måde. Hvis man nu siger at det her appellerer det til nogle bestemte elever? Hvem er det, vi rammer her?</p> <p>Interviewer 1: Helt sikkert.</p> <p>Bo: Kunne det være en mulighed at sige, at nu starter vi på det her {med tavleundervisning hvor der indgår forklaringer på ligninger}, og vi har noget introduktion til det her, og så et par gange hen senere/ nu har vi lige et digitalt arbejds hjørne, vi har et boghjørnet, og så har sådan et praktisk hjørne derovre, nu vælger I selv.</p> <p>Interviewer 2: Det kunne man sagtens. Man kunne også overveje, om man skulle køre et værksted, hvor man får prøvet alle og så {bagefter} siger hvad vil I så helst arbejde med. Så man får mulighed for at opleve alle de forskellige ting, men så stadig kan vælge det man helst vil arbejde med. Fordi jeg tror også der er nogen der går glip af det nogle gange, hvis de ikke bliver introduceret til nogle ting. Fordi de tænker ej, det kan jeg ikke eller det duer ikke, men egentlig finder ud af at det kunne godt være hjælp fra mig.</p>	Samtalen handler om organisering af undervisning med materialet, hvor der anvendes værksteder henvendt til forskellige læringsstile.	Værkstedsarbejde, læringsstile

Bilag 7.2: Kodning efter lærernes holdning til materialet

Afsnit	Interview udklip	Sammenfatning	Nøgleord
--------	------------------	---------------	----------

1	<p>Lis: Det ville hjælpe med at udligne den der med, at nu har jeg brug for hjælpemidler. Der er nogle {elever} der sorterer hjælpemidler fra fordi det er for pinligt at sidde med. Måske det kan være med til at lette matematikundervisningen, at det bliver mere okay og bruge det.</p>	Samtale om klasseundervisning med materialet, om det vil hjælpe nogle, fordi alle skal gøre det.	Hjælpemiddel, pinligt at bruge, afhjelpe tabu
2	<p>Bo: Jaja når jeg sidder og spørger så er det, fordi jeg kan mærke, at jeg bliver udfordret på, selvfølgelig jeg har ikke hørt videoen, men de fire øverste, og så vil de komme hened. Den måde, man sådan hele tiden / for da jeg skulle prøver at forklare Torben og Hans det. Der er det herre nemt, når man forstår det. Men er man Palle og ikke fatter en klap, så er man en hund i et spil kegler.</p> <p>Interviewer 1: Ja fordi hvad betyder så de her oppe? {henviser til de øverste fire kasser, hvor man bestemmer x, $-x$, 1 og -1}</p> <p>Bo: Altså hvis man ikke ved. Hvis man virkelig ikke forstår beskeden, så vil jeg sige, så forstår man det simpelt hen ikke. Så er der for mange, undskyld mig, for mange brikker at spille, det vil der være. Og der findes en Torben i enhver klasse.</p> <p>Intervieweren bekræfter læreren.</p> <p>Bo: Og jeg bliver forvirret. Og jeg føler mig faktisk lidt som en dårlig lærer derinde fordi jeg kunne ikke forklare mine elever det. / til at starte med kunne jeg ikke gennemskue det. Hvis jeg ikke kan gennemskue det, kan der sgu godt nok også godt et par stykker andre der heller ikke.</p>	Samtalen handler om at hvornår det kan være svært at bruge materialet og det er komplekst.	Forvirring over brikker, komplekst, mistet forståelse
3	<p>Bo: Jeg sidder bare derinde og tænker på, for satan, det er noget, det er en rodebunke på den for mig.</p> <p>Interviewere: Ja</p> <p>Bo: Fordi det første man skal, det er at man skal have ryddet alle bordene, der må simpelthen ikke ligge noget som helst, som kan genere de drenge som ikke kan koncentrere sig. Og så skal man på en eller anden måde sige, jamen, hvis det er sådan, hvor stor en brøk {Bo henviser til at man skal overveje, hvor høje tal der skal indgå i ligningerne}. Det var derfor jeg sagde, i stedet for 21, kan vi så eskalere den ned. / Der sidder en lige oven for mig, da jeg sad der observeret dernede. Jamen han han gik i stå, fordi han kunne jo ikke. Altså så begyndte det bare at sætte centicubes ovenpå. Så blev det opgaven.</p> <p>Interviewer 1: Der var projektet.</p>	Samtalen handler om at det bliver uoverskueligt med mange ting på bordet og store tal i ligningerne	Rod, store tal, forvirring
4	<p>{Lærerne snakker om anvendelse af materialet}</p> <p>Bo: Tror jeg det er noget med kompleksiteten altså, mængden af opgaver du skal nå at lave det / bliver altså / Alt materialet er lagt op til dig her i bogen så har jeg 4 timer til at undervise. Altså så har jeg 4 timer til at forberede mig til alt andet i. Og så bliver man sgu lidt ramt af hverdag. Uden at være negativ man bliver bare meget selektiv i sine valg.</p> <p>Interviewer 1: Nej nej det giver mening.</p> <p>Lis: Men det kommer også an på hvilken klasse man har, fordi har man en klasse som netop er meget boglig. Jamen så kommer man også nemt til bare at lade være med at bruge det konkret materiale.</p>	Samtalen handler om lærerens blik op om det ville blive brugt i deres undervisning og hvad der kræver af forberedelse.	Forberedelsestid, boglig klasse, mængde af opgaver
		Her bliver problematikken en helt anden, nemlig den manglende forberedelsestid.	